DE INFINITIS INFINITORUM, ET INFINITE PARVORUM ORDINIBUS

DISQUISITIO GEOMETRICA

In qua, variis utriusque generis gradibus demonstratis, tum Methodi Infinitesimalis fundamenta ostenduntur, tum præcipuè PLUSQUAM INFINITA spatia hyperbolica VVallisii, adversus nuperrimos eorundem impugnatores, vindicantur.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO CREMONENSI

S. Theol. Doct. In Pisana Universitate Publ. Phil. Profess. ac Magni Ducis Etruriæ Theologo, & Mathematico, è Regia Societate.

PISIS, MDCCX.

Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiepisch.
De Superiorum Licentia.

DEO

VERITATIS,

LUMINUM PATRI,

SCIENTIARUM DOMINO,

GEOMETRIÆ PRÆSIDI,

BONORUM OMNIUM LARGITORI

ÆTERNO, IMMENSO, IMMORTALI,

OMNIPOTENTI,

INEFFABILI,
INCOMPREHENSIBILI,
INCOMPARABILI,
UNIVERSORUM
ARCHITECTO, CONDITORI, CONSERVATORI
BENEFICENTISSIMO,
IN ÆTERNUM, ET ULTRA REGNANTI.
QUI EST
SUPER OMNIA, INFRA OMNIA, CIRCUM OMNIA,
INTRA OMNIA, EXTRA OMNIA,
IN OMNIBUS.
UBIQUE PRÆSENTI, SED INACCESSIBILI,
PER CUNCTA DIFFUSO, SED INDIVISIBILI,
OMNIA MOVENTI, SED IMMOBILI,
PRIMO, ET ULTIMO
RERUM OMNIUM PRINCIPIO, ET FINI,
IN MINIMIS MAXIMO, IN MAXIMIS SUMMO,

CIR-

CIRCULO UNIVERSITATIS
INTERMINATO,
INCIRCUMSCRIPTO,
CUJUS CENTRUM UBIQUE EST,
CIRCUMFERENTIA NULLIBI,
INFINITO
OMNIUM INFINITORUM,
ET PLUSQUAM INFINITORUM
MAXIMO,
CUJUS MAGNITUDINIS NON EST FINIS,
SAPIENTIÆ NON EST NUMERUS,
BONITATIS INFINITUS EST THESAURUS.
QUÒD
SUÆ INFINITATIS VESTIGIA
CREATURIS IMPRESSERIT,

HOMI-

HOMINIQUE AD IMAGINEM SUAM FACTO

INFINITI PERSCRUTANDI CAPACEM MENTEM DEDERIT,

AC SUI IPSIUS,

IN ÆTERNO BEATITUDINIS LUMINE,

FACIE AD FACIEM, ALIQUANDO CONTEMPLANDI,

SPEM FECERIT, GRATIAM OBTULERIT, SORTEM PROMISERIT.

GRATI ANIMI ERGO,

OMNIUM OPERUM AUCTORI

EXIGUAM HANC OPELLAM

DE INFINITIS INFINITORUM,

INFINITEQUE PARVORUM ORDINIBUS

GUIDO GRANDUS

HOMINUM MINIMUS, MONACHORUM ULTIMUS,

SED INNUMERIS TANTÆ MAJESTATIS BENEFICIIS

ADSTRICTISSIMUS,

HUMILLIME OFFERT,

DAT, DICAT, CONSECRATQUE.

IN OPE-

IN OPERIS,

Et Auctoris Laudem.

ODE.

Resolve nexus, tolle repagula,
Adstricta certo limite Quantitas,
Quæ Te coarctant terminorum
Contere liberior catenas:

Attende vastos, quos tibi nunc sinus
Contracta nullis finibus Area
Recludit, immensis datura
Planitiem spatiis capacem.

Quondam proterva fronte quibuslibet
Geometrarum nisibus obstitit,
Proportionis, Calculique
Impatiens tolerare frænum;

Sed, Arte GRANDI, jam nihil interest,
Seu limes arctas ambiat undique
Extensiones, sive nullam
Obtineant spatia ampla metam.

Parent iisdem Legibus omnia,
Progressus idem, par ratio datur,
Respectus unus singulorum,
Maxima quo minimis cohærent.

Magis stupendum est, quòd similis tenor
Proportionum regnat in omnibus
Vel summè, & infinitè parvis
Particulis, quibus aucta crescit,

Dato minori tempore quolibet,
Ex ordinatæ fluxibus Area;
Sed amplius miranda longè
Partibus his elementa rursus

Minora, & istis quæ simili modo
Adhuc minores particulæ fluunt,
Nec limitem Natura novit,
Lumen ut Angligenum notavit.

Non

Non dispar ordo per similes gradus
Deducit Infinita prioribus
Majora semper, queis deinceps
Agglomerat spatia ampliora.

Hæc VVallis inter novit Hyperbolas,
Ad altiores quando potentias
Assurgit applicata, plusquàm
Fine superficiem carentem

Complexa: quidquid sivè Parentius
Contra reclamet, seu Varignonius,
Quorum cavillos elevasti
Docti Operis Faber, & Magister

Profundioris GRANDE Matheseos,
Qui mente vasta materiem quoque
Excellis infinitam, & ultra
Jngenii penetras volatu.

Seu Te Poesis sacrat Apollini,
Sive eruditis Historiis vacas,
Stylo aut peroras eloquenti,
Dogmata seu referas sacrata

Divina Legis, seu Penetralia
Naturæ aperto in Lumine collocas,
Seu jura pandis Machinarum,
Seu Numerū Harmonicū reformas,

Quæ sit vagorum aut Orbita Syderum,
Aut quæ Refracti sit Radii Via
Scrutaris, implexosque ductus,
Algebra quos speciosa signat;

Ubique summus, nec superabilis,
Sed unus ipsum Te superas, viam
Geometrarum quando calcas,
Tot variis methodis abundans.

Quæsita quis Te solvere promptior,
Curvasque fili flexilis in modum
Versare, mensuralve certas
Adiicere innumeris Figuris?

Id Viviani Ænigmata, id Hugeni
Probant Reperta, id Cycli, & Hyperbolæ
Dimensio, id meta carentum
Innumerabilis Ordo monstrat.

Preceptori olim suo, in Obsequii Argumentum, canebat
Carolus Taglini Medicinæ Doctor,
Publicus Philosophiæ in Pisano Lyceo
Professor.

DE OPERIS ARGUMENTO
Poeticum Præludium.

QUidquid finitum transcendit, [1] & undique certo
Se circumscribi limite non patitur,
Visum erat et nostram pariter transcendere mentem,
Viresque humani luserat ingenii.
Ausus [2] *Aristoteles*, ausus (3) *Plato*, cuncta *Sophorum*
Turba [4] hoc immensum est traiicere ausa vadum.
Cum

NOTÆ) *Ut lucem aliquam materiæ per se obscurissimæ, ac Musis penè intractabili, conciliarem, explanationem ejus aliquam in his notis subdere visum fuit, & Amicorum consilia persuasere: qui secus faciendum duxerit, eas pro non adiectis habeat, prætereatque. Itaque* (1) Infinitum *cujusvis generis hic intelligo, ejusque Historiam penè universam hoc carmine complector. Illud, tametsi nostrum captum excedere videretur, explicandum sibi sumpsit* (2) Aristoteles *in lib. 3. phys. asserens text. 24. ejus notitiam ad Physicam pertinere, & text. 25. ipsius naturam ab omnibus, qui accuratè philosophiam tradiderant, consideratam fuisse asserens, atque in primis à* (3) Platone, *quem text. 27. narrat*, duo Infinita *posuisse*, Magnum, & Parvum: *quasi recentioribus Mathematicis præluserit, qui* infinitè magna, & infinitè parva *excogitarunt. Omnes denique* Philosophi Scholastici (4) *de Infinito disputate*

Cum ſcopulis (5) luctata diù, ſævisque procellis,
Irruit adverſis obvia turbinibus;
Sed tum da imbelles laſſavit ut unda lacertos,
Viribus effractis, vertere cogit iter.
Qui contra obſiſtunt, hos gurgitis ampla vorago,
Syrtibus allidens oſſa, caputque, rapit;
At pauci hinc reduces, tenuere ubi littoris oram,
Inſtabiles, greſſu ſæpe labante, ruunt;
Nec niſi tricarum (6) male olentes denique ſpumas,
Inflatis buccis, quiſquiliaſque vomunt:
Non numerare ſinus, non explorare profundum
Plumbo, non fines poſſe notare datum eſt.
Subrogat hiſce ſuos divina Matheſis (7) alumnos,
Et deſperatum fortior urget opus.
Tuque Syracuſiæ tutela, & gloria gentis
Antevolas alios, ingenioſe [8] *Senex*.
Aſſuetus vaſtam numero comprendere (9) arenam,
Non modò quæ ſiculo littore ſparſa jacet,
Sed maris, & terræ, ſtellarum, & totius orbis
Implerent quotquot grana minuta ſinum,
Quamvis erat ſpatio contermina fine carentis
Congeries, paucis non referenda notis:
Quàm facilè & pelagus, quo extenſio limitis expers
Clauditur, ingreſſus ducis in alta ratem!
Non

tare aggreſſi, ob graviſſimas, quibus involvitur, difficultates (5) hic allegoricè expreſſas, quid profecerint, & quos fructus (6) demum inde retulerint, notius eſt, quàm hic exponi apertius conveniat. Mathematici (7) ergo Philoſophis ſubſtituti ad Infiniti contemplationem, primuſque [8] Archimedes *Syracuſius hoc vadum tentavit, (9) qui multitudinem arenularum, totam firmamenti etiam Pythagorici capacitatem implentium, in libro, cui titulus eſt* Arenarius, *computavit, ut Geloni Regi probaret,*

Non brevia, & cautes, non acroceraunia terrent,
Non venti, aut nymbi, aut monſtra morantur iter.
Sed noſtris ſubducta oculis vix inclyta puppis,
Metam omnem excedens, invia quæque ſecat,
Cùm ſubitò emergit ſcopulorum immenſa propago,
Quadrupla queis ratio, (10) forma tricuſpis erat.
Hic magnus Geometra jubet conſiſtere: & ultra
Quid properamus? ait: Sat mihi cuncta patent.
Jam video innumeros, quotquot ſine fine quadrantes
Succreſcunt primo, limitem habere ſui;
Nam triquetri ſeries erit omnis [11] epitrita primi:
Inde parabolici eſt area [12] nota loci
Portum igitur victor repetit, radioque magiſtro,
Tanti operis certa in littore ſigna notat.
Proximus huic, longo ſed temporis intervallo,
Ingreditur vaſtum jam (13) *Galilæus* iter;
Expedienſque Tubum (14), quo tot portenta retexit,
Uno Infinitum proſpicit intuitu.
Scrutatur numeros, (15) quotquot mens fingere poſſet,
Illorum varios comparat inde gradus.
Radiceſque [16] omnes, quadrata, cuboſque recenſens,
Nunc totidem (17), nunc ſe plura videre putat;
Nam

ret, numerum arenarum Syracuſii littoris infinitum non eſſe. (10) Porrò infinitam ſeriem triangulorum in quadrupla ratione decreſcentium, quam ſeries tricuſpidum ſcopulorum, eandem rationem obſervantium, hoc loco exprimit, conſiderat Archimedes lib. de Quadr. Parabolæ prop. XXIII. eamque eſſe oſtendit [11] ſeſquitertiam primi trianguli, inde (12) quadraturam parabolæ determinans, eo quod in ſimilem triangulorum, quadrupla ratione decreſcentium, infinitam ſeriem reſolvatur. (13) Poſt XVIII. ſæcula Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus Academicus Lynceus, M. D. Etruriæ Philoſophus et Mathematicus (14) optici tubi, quo tam multa priſcis incognita ſpectacula in cælo detexit, inventione celeberrimus (15) omnes poſſibiles numeros infinitos contemplatus eſt dial. 1. de nova Scientia (16) quærens, num plures in illis ſint radices, an quadrata, vel cubi. Nam (17) ex una parte totidem videntur,

ex

Nam cuivis numero (18) ſuus eſt cubus, atque quadratũ
Cuique ſuum parili lege referre potes;
Rara ſed in numeris [19] quadrorum turma, cuborum
Rarior occurſus, non totidem eſſe ſinit.
Ergo anceps animi Vir Lynceus hæret, (20) in Uno
Quærat, an in Multis quod ſine fine vocant;
Unum etenim [21] ſibimet radix, cubus, atq; quadratũ,
Claudit inexauſto nomina cuncta ſinu.
Ambigit et titulos (22) *Æquum*, *Majuſque*, *Minuſque*
Immenſo in numero, aut mole, tenere locum.
Hos tamen evadit ſcopulos qui [23] poſt Galilæi
Signa, brevi cymba, ponè legebat iter,
Ex inſectilibus (24) componere cuncta elementis
Arte (25) *Cavallerius* nobiliore potens.
Huic licèt [26] innumeris ſint corpora conſita planis,
Plana infinitis conſita lineolis,
Ipſe figurarum [27] plana omnia comparat, omnem
Rectam hujus, rectis omnibus alterius;
Quin et ubi innumeras (28) aperit progreſſio partes,
Continuo ſeriem diminuente logo,

Non-

ex alia non totidem: [18] *primum ſuadet perpetua correſpondentia cujuſvis radicis cum ſuo quadrato vel cubo,* (19) *ſecundum evincit obſervatio, quòd omnes numeri ſunt radices, non omnes verò quadrati ſunt, aut cubici, quorum tanto major eſt infrequentia, quantò magis ab unitate ad altiores numeros aſcendimus: Exhinc dubitat Galilæus* (20) *annon, potiuſquàm in Multitudine, quærenda ſit Infiniti eſſentia in Unitate* (21) *quæ ſibimet quadratum, cubus, et qualibet ſui ipſius poteſtas eſt. Imò ſuſpicatur* (22) *titulos æqualis, & inæqualis non habere locum, ubi ſermo ſit de Infinitis.* (23) *Poſt veſtigia Galilæi, qui methodi Indiviſibilium ſpecimen dederat Dial. 1. cit, ubi de cylindro per hemiſpherium excavato, et Dial. 3. in comparatione ſpatii motu accelerato, & æquabili eodem tempore confecti, veniſſe viſus eſt* (24) *Indiviſibilium Geometriæ Auctor* (25) Bonaventura Cavallerius *Mediolanenſis, qui licèt* [26] *ſolida ex infinitis ſuperficiebus, & ſuperficies ex infinitis lineis contextas ſupponat, tamen* [27] *docet* omnia indiviſibilia *unius figuræ omnibus alterius conferre, omnia ſimul plana in ſolidis, et omnes lineas in ſuperficiebus comparans. Inſuper* (28) *Infinitos terminos continuò decreſcentes, nedum in ratione quadrupla*

[29] ut

Non modò cũ quadrupla eſt (29) Siculi ut doctrina Magiſtri
Prodidit, at quævis regnet in his ratio,
Ad certos ſemper docuit reſtringere fines, (30)
Notaque congeries integra facta fuit.
Flexilibus rectis (31) id *Torricellius* (32), inde
Gregorius [33] variis expoſuere modis.
Quodque fidẽ ſuperat, ſolidum (34) prior ille rotundũ,
Infinita acies cujus hyperbolica eſt,
Mole ſua oſtendit finito æquale (35) cylindro;
Qui à centro ad ſolidi pertinet uſque baſim.
Inde alii (36) innumeras planas, ſolidaſque figuras
[*Sluſius* (37) hos inter, (38) *Craigius*, (39) *Hugenius*]
Quamvis in immenſum quævis ſe extenderet axem,
Ad certi ſpatii ſigna venire jubent,

Rur-

(29) *ut dudum Archimedes oſtendit loc. cit. ſed in qualibet geometrica progreſſione procederent, idem Cavallerius (apud Torricell. De Dimenſ. Parab. Schol poſt Lemm. XXVII.) in unam ſummam* (30) *colligere docuit, quam demonſtrat æqualem tertiæ proportionali poſt primam differentiam, & primam magnitudinem. Id verò* (31) *per flexilinea rectarum ſibi alternatim parallellarum triangulo inſcripta elegantius probavit idem* (32) Evangeliſta Torricellius *Faventinus M. D. Ethruriæ Mathematicus ſub annum MDCXLIV. quod et aliis modis exibuit Gregorius à S. Vincentio Soc. Jeſu anno MDCXLVII. lib. 2. De Circuli Quadratura.* (34) *Jucundum verò, ac penè tum temporis incredibile ſpectaculum Geometris præbuit Torricellius, Solidum nempe acutum hyperbolicum infinitè longum, ab hyperbola circa aſymptoton converſa genitum, quod* (35) *oſtendit æquale finito cylindro eidem baſi adiacenti, ſuaque altitudine ad uſque centrum hyperbolæ extenſo, quem gignit rectangulum aſymptotico ſpatio inſcriptum in eadem converſione.* (35) *Alii deinceps, poſt Torricellium, figuras infinitè longas, tam planas, quàm ſolidas metiri auſi ſunt, quos longum eſſet enumerare, Ut ſunt* Iſaac Barrovius *in lect. Geom.* Joannes Ceva *in Geometria Motus*, Petrus Nicolas *Soc. Jeſu In Exercit. Geometr.* Antonius Lalovera *Soc. Jeſu De Cycloide*, Petrus Fermat *Opuſc. poſthum.* Jacobus Gregorius *in Geometriæ part. univerſ.* David Gregorius *in Exerc. Geom.* Georgius Cheynæus *in Method. Fluxionum &c. tres autem ſolos carminis opportunitas exprimere conceſſit*, (37) Renatum Franciſcum Sluſium *in Miſcellan.* (38) Joannem Craigium *in method. quadrandi figur.* (39) Chriſtianum Hugenium, *a quo et Ciſſoidis Dioclea dimenſionem habemus apud VValliſium in Schol. prop. XXIX. cap. V. Mechanicæ, & Spatii Logarithmici menſuram ad calcem Diatribæ de cauſa gravit. indicatam, quam nos in Hugenianis, cum extenſione ad Logarithmicas altiorum graduum, & multis id genus aliis, demonſtravimus*

vimus

Rursus arithmeticas series quoque *Mengolus* (40) offert,
Quarum finis abest, integra summa datur;
Unum ubi dividitur (41) cunctis quadrisve, cubisve,
Omnibus aut planis, aut solidis numeris;
Quamlibet excedit sed tunc progressio metam,
Cū ratio (42) harmonica est, quę sua membra secat.
Altiùs at penetrans pelagi tam grandis abyssum
Auctor inexhaustæ [43] *VVallis* Arithmeticæ
Ex Infinitis [43] PLUSQUAM - INFINITA recenset,
Et graduum series supputat innumeras.
Nascitur hinc varius rerum ordo (45) fine carentum,
Horret inaccessas mens stupefacta vias.
Nec satis: in summè exiguis discrimina (46) *Newton*
Fermè eadem reperit, (47) *Leibnitiusque* simul;
Ille

vimus. (40) *Simile quid in fractionibus numericis infinitis exhibuit* Petrus Mengolus *Bononiensis in Quadraturis arithmeticis, earum summam accuratè colligens, & finitam esse ostendens,* (41) *quoties unitas denominatur, vel omnibus numeris quadratis, ut* $\frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{25}\ \frac{1}{36}$ *&c.* [*quę series minor est* $\frac{3}{4}$) *vel omnibus cubis, ut* $\frac{1}{8}\ \frac{1}{27}\ \frac{1}{64}$ *&c.* (*quæ minor invenitur* $\frac{3}{8}$) *vel omnibus planis numeris, ex ductu duorum quorumvis proximorum genitis, ut* $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{20}$ *&c.* (*quæ præcisè æquatur* 1.) *vel omnibus Solidis ex ductu quorumvis trium sibi succedentium productis, ut* $\frac{1}{6}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{60}$ *&c.* (*quæ præcisè adæquat* $\frac{1}{4}$) *At verò infinitam esse summam ostendens,* [42] *ubi progressione harmonica fractiones decrescunt, ut* $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ *&c. At* (43) Joannes VVallis *Geom. Professor Savilianus Oxonii in Arithmetica Infinitorum* (44) *Spatia* Plusquam - Infinita *etiam commemorat prop.* 104. & 105. *quæ scilicet infinities superant areas jam infinitas; unde* (45) *patet, eodem jure spatia rursus infinities majora iisdemmet plusquam infinitis excogitari posse, & adhuc alia, a quibus hęc ipsa rursus infinities superentur, & ita deinceps sine limite ad alia altioris ordinis infinita progrediendo. Similiter* (46) Isaac Nevton Eques Auratus *eundem progressum in* Infinitè parvis *proponit, quibus alia infinities minora sint, atque ita porrò,* neque novit natura limitem, *ut ipse ait in Schol. Lemm. XI. suorum Principiorum* Mathem. *Philos. Et simile quid* (47) Godefridus Guiglielmus Leib-

Ille tamen fluxus [48] vocat, & momenta fluentum
Quantorum punctis (49) indicat impositis;
Quartam hic (50) litterulam adiiciens ad symbola rerū,
Queis differre videt proxima quæque, notat.
Naturæ hinc secreta patent (51) mysteria utrique,
Majus et à parvis maxima lumen habent.
Namque Catenarum [52] flexus, & Elasmatis (53) arcū,
Quemve sinum pandant (54) turgida Vela notis:
Semita quæ gravium sit [55] Isochrona sponte cadentū,
Et [56] Brachystochronas discimus inde vias.
Prodit, & hinc (57) varii moderatrix Regula motus,
Et vim (58) centrifugā (59) centripetamq; regens:
Nec latet illa dies, (60) breviora crepuscula cui sunt,
Nec, minimū obsistat cui mare, [61] forma ratis;
Cur-

Leibnitzius *excogitavit, cum hoc discrimine, quod* Nevton *quantitates infinitè exiguas* (48) Fluxiones *vocat, seu Momenta, aut momentanea incrementa, vel decrementa quantitatum, quas* Fluentes, *idest continua successione crescentes, aut decrescentes concipit: easque fluxiones* (49) *puncto ad rei fluentis symbolum superimposito designat, ut si fluens sit* x *vel* y, *fluxiones earum sint* $\dot{x}$ & $\dot{y}$. *At Leibnitzius* (50) *addit litteram quartam, seu characteristicam* d, *nam has particulas infinitè parvas* Differentias *vocat, itaque ipsarum* x, & y *differentiæ notantur per* dx, & dy; *quin et ulteriores fluxionum fluxiones duplici puncto imposito per* $\ddot{x}$ & $\ddot{y}$ *indicat ille, per geminatum* d *exprimit iste, ut* ddx, ddy; *atque ita multiplicando punctum, vel caracteristicam cæteræ quantitates infinitè parvæ altiorum graduum denotantur* (51) *Multa hinc Physicomathematica Problemata, Veterum Methodo impervia, soluta sunt: Nempe* (52) *Curva* Catenaria, *seu funicularia, quam catena suspensa æmulantur,* (53) *Curva* Ellastica *quam lamina Elaterum se evoluentium designant,* (54) *Curva* Velaria, *in quam tumida vela sinuantur,* (55) *Curva* Isochrona *per quam grave descendens æqualiter, æquali tempore, ad datum punctum accedit,* (56) *Curva* Brachystochrona, *sive celerrimi descensus gravium ex dato puncto ad datum punctum; Item* (57) Regulæ motuum, *utcunque vario velocitatis incremento, aut decremento procedentium,* (58) *Leges quoque* Vis centrifugæ, *hoc est conatus à centro recedendi in qualibet curva, quam mobile describat,* & [50] Vis centripetæ *sive impetus urgentis mobile in aliquod centrum, quacunque proportione variari supponatur in accessu, aut recessu à tali centro* (*quarum virium utramque generali nomine* Virium centralium *comprehendit Cl. Varignonius in Actis Academiæ Regiæ, ubi præclara multa de his, & de motuum Regulis ostendit*) [60] *Dies quoque brevissimi, seu* Minimi crepusculi *determinata, itemque* (61) *figura Navigii*

Curvarumque licet (62) mensuras nosse, (63) recursus,
(64) Flexus, (65) Cōtactus, (66) Oscula, (67) Centra, (68) Focos.
Signaque in his radii quę lambant (69) caustica, dum lux
Sive refracta subit, sive reflexa redit;
Et quacunque basi subnixa figura rotetur,
Quas gignat punctum mobile [70] Cycloidas;
Tum quæ se evoluens, [71] post se vestigia linquat,
Dum curva amplexus deserit ipsa suos:
Et quidquid (72) *Bernulliadum* par nobile fratrum,
Aut [73] *Hospitalius*, (74) *Tschyrnbusius*, [75] *Facius*
Inseruere tuis, celeberrima (76) *Lypsia*, in Actis,
Dum methodi illustrant dogmata prima novæ.
Limitis expertum quantorum Analysta (77) repugnat
Sed *Nievuentitius*, nec satis ista probat;
Omne etenī augmentū [78] et graduū discrimina queq;
Ex Infinito reiicienda putat;
Re-

gii Minimæ resistentiæ *inter omnia, quæ in eodem fluido moveantur* (62) Curva-
rum rectificatio, *&* *arearum ab iis comprehensarum dimensio* (63) Puncta rever-
sionum, *in quibus curvæ aliquot retorquentur in easdem partes, unde venerant* (64)
Flexus contrarii, *ubi è concavis convexe fiunt* (65) Tangentes *cujusvis curvæ ima-
ginabilis* [66] Circuli osculantes, *idest maximi, qui ad datum punctum curvæ in-
scribi possint.* (67) Centra *varia, ex quibus curvę describi possunt ope filorum,* (68)
Foci *tum indivisibiles, tum lineares earundem curvarum.* (69) Curvę Causticæ *sive
ex reflexione, sive ex refractione radiorum lucis progenitæ, quas scilicet iidem ra-
dii perpetuò tangunt.* (70) Cycloides *ortæ ex quavis curva super quamlibet aliam
rotata; Item* (71) *Curvę* ex Evolutione *fili aliam curvam circumplectentis, more
Hugeniano, generatæ &c.* [72] Joannes, *&* Jacobus Bernoullii *fratres, ille Chro-
ningæ, hic Basileæ Mathem. Professores longè clarissimi.* (73) Guglielmus Francis-
cus Marchio de Hospitalio *insignis Geometra, qui methodum infinitè parvorum preclara
Analysi* Des infiniment petits *illustravit.* (74) Ehrenfridus VValtherus de Tschyr-
nhausen *celeberrimus Mathematicus, auctor Medicinę mentis & corporis, atque in-
gentium Vitrorum Causticorum inventor.* (75) D. Facio De Duilliers (76) Acta
Eruditorum Lypsiæ *ab anno* 1682. *& deinceps publicata, in quibus alia complura
huc pertinentia occurrunt, quæ, brevitati studentes, omittimus, cùm hactenus ad-
ducta, commendando methodi hujus pretio, abundè sufficiant* (77) *At* Bernardus
Nieuventiit *in Analysi Infinitorum anno MDCVC. edita hunc ulteriorem in infini-
tè parva progressum reiicit & imtrobat* (78) *Nam Infinito quidpiam addi posse ne-
gat,*

Prælludium. 9

Rerum etiā minima (79) admittit, quæ prima vocantur,
[80] Decrementa sed his ulteriora negat.
At tu, (81) Antennoreæ mox Palladis ornamentum,
[82] *Hermanne* huic causæ porrigis ultor opem,
Et repetita (83) Viri eximii argumenta refellens,
Magna et Parva [84] omnes cogis habere gradus.
Sola (85) *Varignoniū* PLUSQUAM-INFINITA moratur,
Quæ spatiis tribuit *VVallis* hyperbolicis.
Ille etenim (86) absurdū quiddā, atque affine Chymerę
Sub tam magnifica voce latere putat.
Tu quoque derides nomen tam grande (87) *Parentr*,
Et Geometrarum è classe [88] valere jubes.
Si tamen aspiret cœptis fortuna secundis,
Et regat hæc trepidum lubrica arena pedem,
Dogmata [89] *VVallisii* per me inconcussa manebunt,
Stabit hyperbolicis [90] multiplus ordo locis.
Parvorum tamen omne genus, [91] variasque deinceps
Magnorum classes, ante referre juvat, Fon-

gat, ac quadratum, cubum, cæterosque gradus Infiniti numeri respuit (79) *unde
& consequenter, primas quidem differentias, seu partes infinitesimas primi gradus
admittit, sed* (80) *ulteriorem differentiationem, idest secundas, ac tertias diffe-
rentias procul ablegandas censet. At* (81) *qui nunc Urbis Patavinæ ab Antennore
fundatæ Cathedram Mathematicam moderatur* (82) Jacobus Hermannus *Basileensis,
variis geometricis Speciminibus in Actis Lypsiæ, & in Ephemeridibus Parisiensibus,
suo merito, celebratus, calculi infinitesimalis causam ultus est, &* [83] *libro, ad-
versus Considerationes secundas Nieuventytii, anno* 1700 *Basileæ promulgato,* (84)
*ad omnem dignitatem evehi posse tum infinitè magnas, tum infinitè parvas quan-
titates ostendit.* (85) *Scrupulum tamen iniecere* D. Varignonio *Spatia* Plusquam
Infinita, *quę VVallisius inter hyperbolas altioris gradus agnovit; hęc siquidem* (86) *nes-
cioquid contradictionis involvere Varignonius credidit:* Un plus que infini, *inquit
in monumentis Acad. Regiæ anni* 1706. m'a toujour paru' renfermer une contra-
diction (87) *Sed et* D. Parent *part.* 3. *Disquis. Phys. & Mathem. novam hanc*
Plusquam Infinitorum *denominationem à Geometris exulare cupit:* celà etant, adieù
nos plus qu'Infinis. *Deo tamen auspice* (89) *Doctrinam VVallisii hoc in proposito vin-
dicandam suscipiemus, &* [90] *multiplicem illum Infinitorum ordinem in ipsis hy-
perbolis, quas VVallisius consideravit, necessario admittendum demonstrabimus: at-
que hic pręcipuus erit nostræ hujus tractationis scopus,* (91) *tametsi, ad uberiorem scien-
tiam, multò generaliùs hoc ipsum argumentum* De Infinitis Infinitorum, & Infinitè

Par-

Fontibus (92) è propriis fluat ut tam nobile Verum,
 Atque haustu recreet liberiore sitim.
Hinc lux [93] uberior, vis firmior, amplior usus
 Accedit methodis, præsidiumque novis.
Nec jam despicies, (94) quòd tangens suppleat arcus,
 Aut curvæ areolæ Zonula recta vicem,
Et laterum innumera serie (95) polygonon habebis,
 Flexa ubi continuum linea ducit iter:
Plurimaque (96) in Physicis rerum miracula disces,
 Invenient certam jam paradoxa fidem:
Totũ Animal minimi ut tegit ovi angusta (97) cicatrix,
 Integra ut exiguo in semine Planta latet.
Explicat implicitas (98) tantùm generatio partes,
 Auctio distendit, perficit, ornat opus:
Nec, quæ succedunt priscis [99] nova semina, terrent,
 Dum renovant fructus tempus in omne suos.
Nam summe exiguis (100) sine fine minora, per omnes,
 Ad sensum veniunt, ducta subinde gradus.
Increpat insueti sed Apollo carminis ausum,
 Nostra jubens, posita, sumere signa, chely.

Parvorum Ordinibus *versare*, (92) *& ipsos hujus doctrinæ fontes aperire curabimus*, (93) *ad novas methodos illustrandas, & confirmandas.* (94) *Licebit deinceps arcum infinitè parvum pro recta ejus tangente sumere, & curvarũ* (95) *quadrilinea infinitè parvæ latitudinis pro rectangulis inscriptis, aut circumscriptis computare: ipsasque curvas pro* (96) *polygonis infinitorum numero laterum summè exiguorum habere (ut Galilæus, ante omnes de Circulo hoc proposuit). Multa etiã* (97) *quæ in Philosophia paradoxa videbantur, credibilia fient, ut Animalis in Ovo, & Plantæ in Semine præexistentia cum omnibus organicis partibus, quæ* (98) *evolvantur dumtaxat per generationem, & per nutritionem amplientur.* (99) *Nec terrere nos debet seminum, & fructuum, quovis anno prodeuntium, multiplicitas: Nam* (100) *admissis variis infinitè parvorum ordinibus, concipere possumus, omnia in semine contenta ex uno ad alium gradum subinde promoveri: ut nempe dum ad sensibilem magnitudinem perveniunt quæ erant in primo gradu infinitæ parvitatis, succedant ad hunc primum gradum quæ erant in secundo, & ad secundũ quæ erant in tertio, & sic deinceps. Quod valet etiam de Plantulis, quæ in seminulis primo semine contentis latent cum suis infinities adhuc minoribus seminulis, continentibus plantulas alias infinities minores, atque ita in infinitum.*

EX-

EXPOSITIO

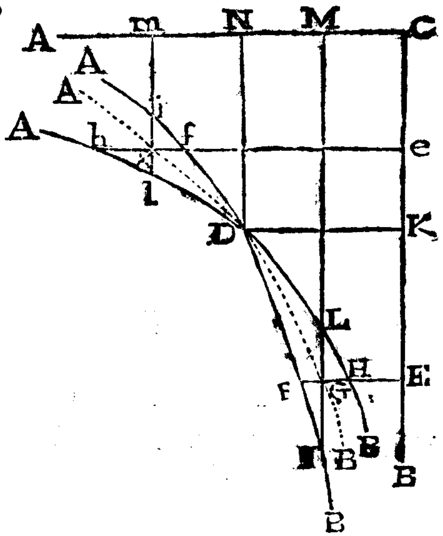
CONTROVERSIÆ

Circa magnitudines Plusquam-infinitas, quæ præsentis tractatus editioni præbuit occasionem.

Celeberrima est spatiorum plusquam infinitorum, quæ in hyperbolis altiorum graduum supra Apollonianam, ad alteram asymptoton remanent, consideratio. Hanc denominationem illis inditam voluit ante omnes alios Cl. VVallisius *Arithmet. Infinit. prop.* 104. 105. *&c. & in Mechan. cap.* 4. *prop.* 7. Quod ipsum & nos, *Hugenian. cap.* 4. *n.* 12. ab eodem VVallisio optimè observatum tradidimus, & potest ex his, quæ *ibidem cap.* 8. *n.* 11. generatim ostendimus, facillimè demonstrari.

 Ni-

Nimirum ex ibi dictis patet, quòd ſi inter aſymptotos A C, C B ſit hyperbola Apolloniana A g D G B, cujus nempe ea ſit proprietas, ut ratio quarumvis ordinatarum D K, G E, ſit æqualis rationi abſciſſarum à centro reciprocè ſumptarum E C, C K, erit ſpatium poſt quamlibet ordinatam D K, aſymptoto K B, & curva D G B indefinitè productis interjectum, magnitudinis abſolutè infinitæ, quippe quæ ad inſcriptum parallelogrammum C K D N erit ut 1 ad 0, quę ratio eſt infinitè magna, ſeu major qualibet aſſignabili.



Sin autem talis hyperbola A h l D L H B iiſdem aſymptotis per idem punctum D inſcribatur, cujus ordinatarum D K, H E ratio ſit duplicata rationis abſciſſarum reciprocè ſumptarum E C, C K: nempe cujus ordinatæ ſint ut quadrata dictarum diſtantiarũ reciprocè accepta: tunc ſpatium poſt ordinatam K D, aſymptoto K B, et curva D H B ad partes B infinitè productis interiectum, præcisè æquabitur eidem parallelogrammo C K D N, quippe ad illud erit ut 1 ad 1. Et ſi ordinatarum ratio reciprocæ rationis abſciſsarum triplicata foret, adeòut illæ harum cubis è contrario reſponderent, haberetur hyperbolicum ſpatium poſt ordinatam K D ſimiliter ad partes B in infinitùm excurrens, ſubduplũ ejuſdem parallelogrammi C K D N. Atque ubi ordinatarum ratio reciprocæ abſciſsarum rationis quadruplicata foret, prodiret ſpatium illud hyperbolicum ſubtriplum hujus parallelogrammi, atque ita in reliquis procedendo.

Adeo

Adeout generatim ſi ratio ordinatarum ſit ad reciprocam rationem abſciſſarum, ut x ad y (vel, quod eòdem redit, ſi ordinatarum poteſtates, ab exponente y denominatæ, reſpondeant reciprocè poteſtatibus abſciſsarum ab exponente x indicatis) ſemper ſpatium hyperbolicum poſt unam ordinatam, aſymptoto et curvæ in infinitum productis interiectum, reperiatur eſſe ad inſcriptum parallelogrammum, ut y ad $x - y$: Sic enim in prima Hyperbola Apolloniana, ubi utraque ratio, tam ordinatarum, quã reciproca abſciſsarum, æquatur, adeoque y ad x eſt ut 1 ad 1, erit ſpatium hyperbolicum ad parallelogrammum, ut 1 ad 1 − 1, ſive ut 1 ad 0. In ſecunda hyperbola, in qua prima ratio eſt duplicata ſecundæ, fiet x ad y ut 2 ad 1, & proinde ratio ſpatii hyperbolici ad parallelogrammum, ut 1 ad 2 − 1 ſive ut 1 ad 1. Ubi verò prima ratio ſit triplicata ſecundæ, adeò ut y manente 1, x evadat 3, erit ſpatium ad parallelogrammum ut 1 ad 3 − 1, ſive ut 1 ad 2, atque ita deinceps.

Adeoque cùm hæc lex ſemper obtineat, utpotè fundata in ratione ſubtangentium, quæ ſemper ſunt ad diſtantias ordinatarum a centro, ut exponens poteſtatis ordinatarum y ad exponentem poteſtatis abſciſſarum x (ſive ut harum ratio ad rationem illarum) per dicta Hugenianorum *cap. 7. n. 9.* conſequens eſt, ut in hyperbolis A f D F B, ſi viceverſa abſciſsarum E C, C K ratio duplicata, aut triplicata fuerit reciprocę rationis ordinatarum K D, E F, utpotè ſi harum quadrata, vel cubi &c. ſint reciprocè ut diſtantiæ earundem à communi centro (quod in iiſdemmet hyperbolis ſupra conſideratis evenit, ſi modò ad alteram aſymptoton referantur, ut diſtantiæ in ordinatas, & ordinatæ in diſtantias mutentur, adeoque y ad x ſit ut 2 ad 1, vel ut 3 ad 1, &c. etiam ratio hyperbolici ſpatii poſt unam ex dictis ordinatis juxta ſuam aſymptoton, cum ipſa curva, infinitè productam extenſi, ad inſcriptum paral-

paral-

parallelogrammum erit, ut y ad $x-y$ hoc est ut 2 ad $1-2$ (nempe ut 2 ad -1, sive ut 1 ad $-\frac{1}{2}$); vel ut 3 ad $1-3$ (ideft ut 3 ad -2, sive ut 1 ad $-\frac{2}{3}$) & sic de aliis; quæ ratio cùm major sit ratione 1 ad 0 (ob consequens minus, quàm 0) sitque 1 ad 0 ratio simpliciter infinita, constat majorem rationem spatiorum, de quibus loquimur, ad inscripta parallelogramma esse *plusquàm infinitam;* & ideò dicta spatia meritò à Cl. VVallisio *plusquaminfiniti* nomine fuisse appellata.

Nuperrimè tamen scrupulum super his in Gallia subortum intelleximus; Nam anno 1700 D. Carrè *in methodo mensuræ superficierum &c. sect.* 1. *coroll. prop.* 23. cùm intulisset, spatia hyperbolica, quorum index potestatis ordinatarum *m* sit minor unitate accepta pro exponente distantiarum a centro, esse *plusquam infinita*: in margine monuit, se ita appellasse, ne à communi, & vulgari loquendi modo recederet, cæterùm à nonnemine opportunam rei hujus explicationem propediem expectandam: *c' est pour parler le langage ordinaire, que je me sers du mot de* plus qu'infini. *Une personne doit nous donner au premier jour un èclaircissement sur cette matiere.*

Tum anno 1705 D. Parent *in Disquisit. Phys. & Mathem. tom.* 1. *part.* 3. *pag.* 552. hunc ipsum locum D. Carrè ad censuram vocans, postquàm ejus calculum reformare aggressus est, nostrum hoc plusquam infinitorum genus, per jocum, valere jubet: *cela ètant, adieu nos plus qu' infinis:* & velut ægrè tulerit vel denominationem illam, quasi *vulgò usurpatam*, à D. Carrè indicari, quam, utcunque magnificam, novam tamen, aut saltem inutilem esse sibi persuadet, hæc subdit: *Mais quelle utilitè tirerons nous de ces grands & nouveaux termes, qu' on nous donne pour des termes triviaux?*

Tan-

Tandem anno 1706 Cl. Varignonius expresfè VVallisium hac in re sibi confutandum proposuit *in Monum. Phys. & Mathem. Regiæ Academiæ Parisiensis die tertia Februarii ejusdem anni:* Postquàm enim retulisset, laudatum Scriptorem Anglum, dum spatia, quæ hyperbolis, & ipsarum asymptotis interiiciuntur, ad mensuram vocat, ob dimensionem quorundam ex his spatiis per negativas magnitudines expressam, eadem *plusquàm infinita* credidisse, subdit: „ sibi magnitudinem plusquam infinitam nescio quid cnotradictionis semper includere visam fuisse; unde ad inquirendam mysterii hujus enodationem excitatum esse: atque omne mysterium evanescere debere confidit, ubi ostenderit, Authoris hujus expressionem pro spatio plusquam infinito, ne quidem spatio simpliciter utcunque infinito competere, sed tantùm finito, quod quidem spatium verè infinitum ad alteram partem residuum compleat; adeòque hyperbolas cum asymptotis suis non comprehendere spatia plusquam infinita, ut Author ille contendebat: atque hanc demum esse explicationem illam, quam D. Carrè in suo Libro de Calculo integrali super hac materia prodituram (ante sex annos scilicet) promiserat „ En ejus verba, uti habentur in dictis Academiæ monumentis anni 1706. *pag.* 15. editionis Amstelædamensis. *Monsieur VVallis cherchant la mesure des Espaces renfermez par des hyperboles, & leurs asymptotes, & aiant trouvè pour l' expression de quelques-uns de ces Espaces des grandeurs negatives, a crù qu' ils ètoient plus qu' infinis. Mais comme un plus qu' infini m' a toùjour parù renfermer une contradiction, cela m' a dèterminè à chercher le dènouement de ce mystere, qui cessera d' en ètre un, dès que j' aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l' expression d' un Espace plus qu' infini, n' est pas même celle d' un infini, mais seulement d un Espace fini, qui est à la veritè le complement d' un Espace infini; & qu' ainsi les hyperboles, & leurs asymptotes ne renferment point d' Espaces plus qu' in-*

qu' infinis, comme cet Auteur l'a pretendu. C'est là l'eclaircissement qui a èté promis dans le Livre de M. Carrè sur le Calcul Integral.

Hinc post traditam doctrinam suam de quantitatibus negativis, non magnitudinem plusquam infinitam in hoc proposito denotantibus, sed prorsus finitam, ad partes tamen contrarias de more accipiendam, concludit. „ Tantum abesse, ut hyperbolæ altioris ordinis supra Apollonianam spatium plusquam infinitum comprehendant, quòd potius ipsius Apollonianæ hyperbolæ spatium censeri possit magis infinitum spatio ab aliis comprehenso, quippe illud ex utraque parte, hoc verò ab una dumtaxat parte infinitum deprehenditur „, ait enim: *D'où l'on voit que l'espace ACBGA* (hyperbolæ nimirum ordinariæ in superiori figura) *doit ètre infini de part & d'autre; & par consequent plus infini [pour ainsi dire] que les prècèdens ACBBFA, & ACBBHA* (aliarum nempe hyperbolarum) *qu' on vient de voir ne l'ètre, que par chàcun un còtè. Donc il s' en faut bien qu' ils ne soient plus qu' infinis.*

Nos autem Cl. VVallisii doctrinam, & expressionem vindicantes, ostendemus, revera hyperbolas altioris ordinis supra Apollonianam, ex una parte licet finitum spatium comprehendant, ex alia tamen usqueadeò spatium plusquam infinitum continere, ut etiam infinities majus sit spatio ab Apolloniana hyperbola contento: adeòut spatium Apollonianæ hyperbolæ, licèt utraque ex parte jam infinitum, quantumvis adhuc multiplicatum, semper minus ostendatur quovis spatio ad unam asymptoti partem ab altioribus illis hyperbolis contento, & qualibet etiam aliquota ipsius parte: ac demum ita comparari debere spatium infinitum hyperbolæ Apollonianæ ad ea spatia, quæ ab altioribus comprehenduntur, ut quædam finita quantitas ad infinitam, vel ut ∞ ad 1. Usque adeò verum est, spatia illa plusquam infinita censeri debere, & VVallisianam

nam illam denominationem, velut optimo fundamento nixam subsistere, meritòque adhuc ab omnibus esse retinendam.

Enimverò hoc ipsum, quod nos de spatiis illis hyperbolicis demonstraturos recepimus, sufficere, atque illud unũ requiri, ut spatium quoddam plusquam infinitum habeatur, fassus est Auctor Historiæ ejusdem Academiæ Regiæ anni 1706 in hujusmet controversiæ enarratione, & Varignonianæ dissertationis recensione, optimè animadvertens: „ Plusquam infinitam non censeri magnitudinem, quæ alia infinita utcunque sit major, cùm infinitæ magnitudines, juxta quorumvis numerorum rationem, aliæ aliis majores, aut minores esse possint, absque eo quòd ordinem infinitorum excedant, perinde ac finitæ quantitates juxta quamvis rationem auctæ, vel imminutæ, finitorum ordinem non transcendunt; sed illas plusquam infinitas magnitudines demum censendas, quæ ab infinitorum ordine emergentes, ad ordinem superiorem fuerint elevatæ, ut accidit finitis magnitudinibus, ubi ad ordinem infinitorum transierint. „ En ipsa eloquentissima verba Historici prælaudati *pag. 60.* Batavæ editionis: *Car ce qu' on nomme ici plus qu'infini, ce n' est pas une grandeur infinie plus grande qu'une autre infinie: les grandeurs infinies peuvent ètre plus grandes ou plus petites les unes que les autres, selon tous les rapports possibles des nombres, & cela sans sortir de l'ordre de l'infini, de meme que les grandeurs finies ne sortent pas de l'ordre du fini pour varier entr'elles selon tous ces rapports. Mais ce qu'on entend par des grandeurs plus qu'infinies, ce sont des grandeurs qui etant sorties de l'ordre de l'infini doivent s'elever à un ordre superieur, comme font les grandeurs finies lorsqu'elles passent à l'ordre de l'infini.*

Idipsum & Auctor Diarii Parisiensis *in suplemento ultimi Februarii* 1708, hanc historiam, & controversiam recensens, repetit totidem penè verbis: deinde adiicit „ Quòd si plus-

C

quam

quàm infinitæ magnitudines admittantur, ordo quidam altior ipsomet infinito erit excogitandus, atque inducendum, non modò unum infinitum simpliciter alio majus, sed genus quoddam magnitudinum, quæ Infiniti ordinem prætergressæ ad superiorem alium ordinem eleventur „ *Si ce, qu'on appelle dans cet article* Grandeurs plus qu'infinies, *avoit lieu, il faudroit reconnoitre un ordre plus elevè que celui de l'infini, & admettre non pas simplement un infini plus grand qu'un autre, mais des Grandeurs sorties de l'ordre de l'infini, & elevèes à un ordre superieur*. Tum notabilem hanc animadversionem subiicit, qua „ non omnino reiiciendas plusquàm infinitas magnitudines (adeòque nullam contradictionem, qualem in ipsis Varignonius fingit, absolutè involvere) ex Geometriæ transcendentis principiis, varios infinitorum ordines agnoscentis, apertè innuit: verùm in hoc speciali proposito hyperbolarum VVallisii, omne plusquam infinitum jure à Varignonio reiici statuit, quippe illarum expressio à VVallisio adducta, ne quidem pro simpliciter infinito, (nedum non pro plusquam infinito) sed purè finito spatio fuerat accipienda „ *Quand les principes de la Geometrie transcendante ne permettroient pas de rejetter absolument l'idèe de differens ordres d'infinis, M. Varignon auroit toujours raison de la rejetter dans la question presente. Et en effet il fait voir, que ce que M. VVallis a pris pour l'expression d'un espace plus qu'infini, n'est pas même l'expression d'un espace infini; l'espace exprimè etant purement fini*.

Me igitur operæ pretium facturum existimavi, si rem ipsam altiùs repetens, varios tum Infinitorum, tum infinitè parvorum ordines, quos profundior Geometria, quæ nunc temporis in usu est, ac per infinitè exigua magnitudinum elementa procedere solet, ex omnium fermè Geometrarum, qui ejus principia deguſtaverint, confessione agnoscere necessariò debet, demonstrare, & quàm dilucidè fieri poterit, exponere aggrederer, speciatim verò Hyper-

perbolarum VVallisii *plusquam infinitarum* non unam, sed multiplicem purè geometricam demonstrationem in medium afferrem, quæ nullis Calculi ambagibus imponere cuiquam possit, nullisque cavillationum technis eludi: adeò ut non magis excipere queat Varignonius, expressionem horum spatiorum invertendam, et ad aliam partem, negativo in positivum transeunte, ac plusquàm infinito in purè finitum converso, esse sumendam, quàm si contenderet, quæ de Triangulis ostendit Euclides, esse de Circulis, aut Parallelogrammis intelligenda.

Veniam, ut spero, dabit conatibus nostris Cl. Varignonius, cujus præclarissimæ famæ, quam sibi tot mechanicis, ac geometricis, & analyticis egregiis speciminibus, immortali planè memoria dignissimis, peperit, nihil idcircò detractum volo, dum Collegæ nostri VVallisii honorem, & Illustrissimæ Regiæ Societatis nostræ Decus, ac Veritatis ipsius pretium hac in parte vindicare contendo: simulque tum ipse, tum profundiores alii Geometræ permittent, ut me vel Tyronum captui accomodans, doctrinam hanc minutissimè exponam, ea ipsa, quæ tamquam vulgatissima habentur, ex suis velut principiis exactè demonstrans, ne quid fortassis obrepat, quod minùs assuetis ad hæc profundiora Matheseos mysteria mentibus ullam falsitatis suspicionem possit ingerere; liberum enim cuilibet futurum erit, ut ea quæ facillima, & sibi notissima sunt, statim transiliat, atque in his dumtaxat, quæ propositæ controversiæ punctū propiùs concernunt, examinandis, tempus insumat.

Hortandus interim mihi est Lector Geometra, ne inter inanes, ac nulli usui profuturas meditationes, nostram hanc de Natura Infiniti, variisque ejus classibus, quas pauci hactenus animadvertere, ac distinguere potuerunt, collocandam censeat; nam præter egregios fructus, quos probè instituta mens ex hujusmodi considerationibus ad Divinorum contemplationem sibi derivare facilè potest, qua-

 tenus

tenus nihil æquè idoneum est in Dei Opt. Max. ejusque summarum perfectionum notitiam (quantùm naturæ viribus assequi datur) nos promovere, atque in ejus incomprehensibilis Sapientiæ, omnemque, vastam licèt, ac ultra quoslibet, terminos extensam ideam, immenso intervallo superantis Potentiæ admirationem inducere, ac seria Infinitorum discussio: præter hos, inquam, egregios sanè, ac præstantissimos fructus, aliosque non absimiles ad vitam rectè, moderatèque instituendam pertinentes, quibus vel solis quidquid ad Infiniti Naturam enucleandam, ejusque proprietates aperiendas collimat, satis commendaretur, innumera ex eodem hoc fonte in universam Mathematicam, & Philosophiam profluere emolumenta is unus diffiteri poterit, qui iisdem percipiendis impar extiterit; Nam, exempli causa, Circuli, & Hyperbolæ quadratura, quæ tot modiis tentata, quoslibet Geometrarum conatus per tam multa sæcula pertinaciter elusit, tandem ab infinita terminorum serie pendere deprehensa est, ut in nostro Libello *Quadratura Circuli, & Hyperb.* anno 1703 Pisis edito geometricè demonstravimus. Innumeri naturales effectus in Physica adhuc ignoti manent, quòd infinitam principiorum seriem, à qua fortasse dependent, ignoremus. Tota Geometria Infinitè parvorum methodo nunc perficitur, & in immensùm ultra fines à Veteribus constitutos ampliatur: perfectioni autem tam nobilis Scientiæ connecti et perfectionem Philosophiæ, atque hanc pari passu cum illa in dies promoveri, quis nesciat? Verùm hęc alibi fusiùs, & opportuniùs: ad rem ipsam veniamus.

DE

DE INFINITIS INFINITORUM, ET INFINITÈ PARVORUM ORDINIBUS.

DEFINITIO I.

RATIONES *assignabiles dicuntur, quibus æquales, aut quamlibuerit proximas, per positivos numeros, possumus exhibere.*

SCHOL. Comprehendit hæc definitio etiam rationes asymetrarum magnitudinum, ut diametri ad latus quadrati, vel lateris trianguli æquilateri ad ejus perpendiculum &c. quæ licèt numeris exprimi nequeant, ostenduntur tamen quibusdam numericis rationibus majores, quibusdam minores, adeòque intra certos limites continentur, intra quos etiam possumus propositæ rationi quamlibuerit proximam per numeros exhibere, juxta ea, quæ demonstravimus *in Hugenianis cap.* 3. *n.* 3.

DEFI-

DEFINITIO II.

Magnitudines abſolutè Finitas voco, quas vulgò tractamus, quæque ad ſimilem nobis notiſſimam quantitatem, in noſtro ſaltem corpore determinandam, rationem aſſignabilem obtinent.

SCHOL. Quaslibet magnitudines digito, palmo, pede, vel ulna, nimirum humani corporis partibus, ad certam quamdam mediocrem quantitatem, inter tot varias, publica auctoritate, taxatis, metiri omnis natio conſuevit: itaque eodem modo ad corporis noſtri molem cætera corpora, ad noſtrã ſuperficiem cæteras ſuperficies, ad noſtram altitudinem cæteras lineas, ad angulum, quem altitudo noſtra cum horizontali recta comprehendit, cæteros rectilineos angulos, ad noſtrum pondus cæterarum rerum gravitates, ad noſtram vim cæteras potentias, ad noſtræ vocis tenorem cæteros ſonos, atque ita de reliquis, referre non immeritò poſſumus, velut ad magis obviam, magis naturalem, nobiſque notiſſimam menſuram, ad quam certè quælibet finitæ quantitates ejuſdem generis, quas vulgò tractamus, aſſignabilem aliquam obtinent rationem.

DEFINITIO III.

Magnitudines abſolutè Infinitas voco, quæ ad finitam quamlibet ſui generis magnitudinem rationem habent majorem qualibet aſſignabili.

SCHOL. Non contendimus, talem aliquam magnitudinẽ reipſa exiſtere, vel aliquando extituram, ſed ipſe progreſſus quantitatum, certa quadam lege, creſcentium, menti noſtræ occaſionem præbet, illas ſine limite augendas, & ultra quamvis datam magnitudinem ampliandas concipiendi, quarum itaque ratio ad quamlibet finitam ſui generis quantitatem, major ſemper, & major evadat, quàm quæ-

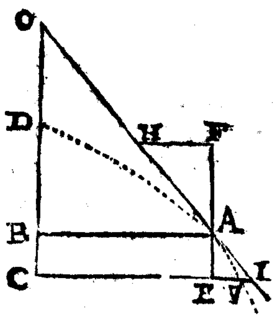
libet

libet ratio aſſignabilis: ita conica ſuperficies, ejuſque ſectiones parabolicæ, & hyperbolicæ, ſuapte natura infinitæ ſunt, quatenus ſemper augeri, extendique ulterius, adeòque omnem finitam ſuperficiem ſuperare concipi poſſunt; licèt interim quidquid ex illis determinatè acceperimus, ſemper noniſi finitum futurum ſit, in eo autem dumtaxat, quod accipiendum ſupereſſet, tota Infinitas lateat. Neque enim fieri poteſt, ut magnitudo undique circumſcripta, & limitata, pro abſolutè infinita habeatur: quarè licèt parabolæ, exempli causâ, axis in infinitùm protenſus ſit abſolutè infinitus, non ideò concipi poteſt, velut longitudo binis punctis, quantumvis diſtantibus, intercepta, ſed ex una dumtaxat ſui parte, nempe ad punctum verticis, unde originem ſuam ducit, determinata, ad aliam verò partẽ termino, & fine carens, utpotè ſine limite ſemper augenda.

DEFINITIO IV.

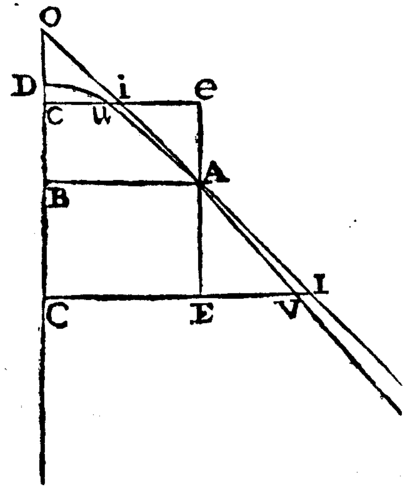
Magnitudines abſolutè infinitè parvas intelligo illas, quæ ad finitam ſui generis magnitudinem habent rationem minorem qualibet aſſignabili.

SCHOL. Has magnitudines infinitè parvas Cl. D Leibnitzius *Differentias*, vel Elementa variabilium quantitatũ vocavit: Illuſtriſs. Eques Nevvtonus *Fluxiones*, ſeu momentanea incrementa, aut decrementa magnitudinum, continuo quodam fluxu creſcentium, aut decreſcentium, antea appellaverat: Multis placet eaſdem *Infiniteſimas* magnitudinũ partes dicere; quæ ut intelligantur, concipiatur recta BA per axem DC curvæ DAV, ſibimet parallella manens, moveri, atque interim continuò creſcat, aut minuatur, prout opus eſt, ut



ad

ad curvæ perimetrum altero extremo pertingat; ducta ergo A E axi parallela, si imaginemur [licèt, ad confusionem vitandam, has aliquantulum dissitas figura exprimat] ordinatam B A venisse in situm, quàm maximè intelligere possimus, eidem proximum, & jam congruere rectę C V: ejus incrementũ, aut decrementũ V E erit differẽtia infinitè parva ordinatæ B A, similiterque arcus A V differentia erit infinitè parva curvæ D A V, itidemque erit B C differentia infinitè parva axis D B, nec non areola A B C V, duabus ordinatis infinitè proximis intercepta, dicetur differentia infinitè parva areæ D A B; manifestum enim est, posse concipi, ut tam prope accedant invicem ordinatæ B A, C V, ut ratio tam E V ad B A, quàm C B ad B D, nec non V A ad A D, & spatii A B C V ad A D B, minor evadat quavis proposita ratione assignabili; minuitur enim hoc continuo accessu ordinatarum A B, C V, quælibet ex dictis quantitatibus E V, C B, V A, A B C V in infinitum, ac tandem penitus evanescit, ubi utraque ordinata perfectè congruit; quare priùs oportet, ut minor fiat qualibet finita sui generis magnitudine assignabili, ideoque ad datum consequens rationem subinde acquirat, in hoc continuo fluxu, minorem qualibet assignabili. Similiter rotata curva D A V circa axem D C, ostenderetur, rotundæ superficiei per curvæ rotationem genitæ differentiam, ab arcu A V infinitè parvo procreatam, esse pariter infinitè parvam: nec non rotundi solidi portionem, planis per B A, & C V infinitè proximis æquidistanter ductis interceptam, esse infinitè pariter exiguam, &c.



Cæ-

Cæterùm hìc pariter observandum est, nec magnitudines has infinitè parvas concipi debere, velut determinatas, aut determinabiles quasdam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant; quascumque enim portiunculas linearum, superficierum, aut corporum (itidemque virtutum, celeritatum, angulorum &c.) acceperimus, aut designaverimus, hæ semper reipsa finitæ erunt, non infinitè parvæ: itaque non sunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coarctandæ, sed concipiendę sunt ex una dumtaxat parte, ad summùm, limitatæ (ut C B fixum terminum habet in B, V A fixam originem habet in A, area B A V C adiacet fixæ lineæ A B, & corpusculum, ex illius conversione circa B C descriptum, adhæret fixo circulo radii B A) ex altera verò parte fixum limitem non habentes, sed alteri extremo semper propiùs accedentem, ut continuo fluxu accedit punctum C ad B, & V ad A, & C V ad B A, intervallo utrisque interposito, infra quamlibet assignabilem magnitudinem, perpetuò decrescente. Aut etiam utrumque extremum sibi invicem accedere concipi potest, ut puncta E, V sibi semper propiora fiunt, neutro fixam positionem servante, dum lineolam E V infinitè parvam intercipiunt. Unde hæ magnitudines semper ut decrescentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent, ut suo, infra omnem assignabilem quantitatem, decremento, sub ratione infinitè parvarum, sive infinitesimarum partium intelligi possint.

DEFINITIO V.

Duarum quarumlibet magnitudinum, si prima ad secundam habuerit rationem majorem qualibet assignabili, adeòque, convertendo, secunda ad primam sit in minori ratione, quàm qualibet assignabilis, dicetur prima infinita respectu secundæ, sive infinities maior illa: secunda verò infinitè parva respectu primæ, aut infinities minor eadem.

D SCHO-

SCHOL. Hoc modo etiam finitæ magnitudines respectu quidem absolutè infinitarum erunt infinitè parvæ, at respectu earum, quæ sunt absolutè infinitè parvæ, erunt ipsæmet infinitæ; Quare patet, nomina hæc *Infiniti*, aut *Infinitè parvi*, relativa potius esse, quàm absoluta, licèt communi loquendi modo obsecundans, *in Defin. III. & IV.* absolutè acceperim hæc vocabula, quia tunc respectus saltem ad ordinarias finitas quantitates subintelligebatur; quemadmodum etiam *Magnum & Parvum* termini sunt semper relativi, sed quoties ad ordinariam, & magis communem alicujus generis mensuram referuntur, absolutè solent enunciari, magnus aut parvus homo, magnus aut parvus canis, magna vel parva domus, subintelligendo respectu hominis, canis, aut domus medioctis, & magis usitatæ quantitatis.

DEFINITIO VI.

Ejusdem inter se ordinis, aut gradus magnitudines sunt, cùm earum ratio est assignabilis: Cùm verò hujus ad illam major, aut illius ad hanc minor est ratio, quàm qualibet assignabilis, tunc gradus, aut ordinis hæc superioris, illa inferioris dicatur respectu alterius.

SCHOL. Hinc ex quantitatibus Infinitè parvis, aut Infinitis, vel Finitis, primæ inferioris gradus sunt respectu cæterarum, secundæ sunt ordinis superioris ad reliquas, tertiæ superioris quidem gradus aut ordinis respectu priorum, at inferioris respectu secundarum: inter se autē ejusdem ordinis aut gradus esse constat finitas quaslibet magnitudines. An verò magnitudines omnes absolutè infinitę, vel infinitè parvæ semper ejusdem inter se ordinis censendæ sint, an potius diversi gradus in utroque hoc magnitudinum genere reperiri queant, id in præsenti disquisitione deregendum erit: Clarissimis viris *Newtono, Leibnitzio*, utrique *Bernoullio*, *Hospitalio*, *Hermanno*, ipsique etiam *Varignonio* sua constat diversitas ordinis in infinitè exiguis, quippe fluxionum fluxiones, & differentiarum differentias secundas, tertias, quartas &c. in Geometriam invexerunt, ut ex ipsorum monumentis passim liquet; *Bernardus* autem *Nievventytius* in sua *Analysi Infinitorum*, non esse ultra primas differentias progrediendum, pluribus contendit, adeòque infinitè parvas magnitudines ad eundem semper ordinem spectare arbitratur. Iisdem supra laudatis egregiis Viris (præter Varignonium & Nievventytium] placuisse, ut ordinis, & gradus diversitas etiam inter quantitates infinitè magnas admitteretur, ex eorum modis, & loquendi formulis patet, ut ex celebri Leibnitzii dicto, *Actor. Lypsiæ pag. 86. Et infiniti sunt gradus, tam infinitorum, quàm infinitè parvorum*; Idque VVallisii præsertim exemplo factum est, qui omnium primus spatia *Plusquàm infinita* in Hyperbolis altiorum graduum detexit: hæc enim nihil aliud sunt, ut videbimus, quàm infinitæ magnitudines superioris ordinis, quæ nimirum adhuc respectu quantitatum absolutè jam infinitarum sunt infinitæ, sive illis infinities majores, quemadmodum differentiæ secundæ, vel tertiæ Leibnitii sunt quantitates infinitè parvæ ordinis inferioris, sive infinities minores ipsismet primis differentiis, quæ jam absolutè erant infinitè exiguę. Et sanè, mirum est, Cl. Varignonium *in monum. Acad. Reg. anni* 1706 hęc VVallisii spatia *plusquam infinita*, velut contradictionem involuentia, reiicere, dum secundas, & tertias differentias, adeòque partes ipsismet infinitesimis infinitè minores [quę *plusquam infinitè parva* dici possent] tam frequenter admittit, ubi de viribus centralibus, de radiis osculi, aliisque similibus differit. Enimverò, nonne ipsę finitę quantitates infinities continent primas differentias, & hę rursus infinities continent secundas, secundæ autem tertias? ergo multitudo secundarum differentiarum in ipsamet finita magnitudine est

est plusquam infinita, & tertiarum differentiarum multitudo in ipsis infinitesimis primi ordinis plusquam infinita est, infinities verò plusquam infinita in magnitudinibus finitis, ac multò magis in quantitatibus absolutè infinitis: adeò ut quævis magnitudo si continet infinitas numero primas differentias, utique contineat plusquam infinitas differentias secundas, & in altiori adhuc infinitatis gradu contineat differentias tertias; & in multò altiori quartas, atque ita deinceps. Quidquid id est, non abs re fuerit, hypotheticè saltem, hoc vocabulum interim definire, ut certa, & distincta controversę rei notio habeatur.

DEFINITIO VII.

Siquæ magnitudines infinities majores ostendantur aliis magnitudinibus jam absolutè infinitis, adeòque ordinis superioris ad ipsas probentur, illæ PLUSQUAM INFINITÆ poterunt appellari.

SCHOL. Hoc enim nomen, ipsis à VValisio quondam inditum, alii deinceps Clarissimi Geometræ retinuerunt, ut Renatus Franciscus Slusius, David Gregorius, Joannes Craigius, & inter Gallos, quibuscum nunc instituitur disputatio, celeberrimus Marchio Hospitalius *in Tractatu Analytico Sectionum Conicarum. lib.* 5. *prop.* 14. *coroll.* 2. *n.* 3.

Fateor tamen, quodlibet infinitum posse adhuc *plusquam infinitum* censeri, quia cùm nullus sit minimus infiniti gradus, quolibet infinito proposito, semper aliud infinities minus reperiri potest, cujus respectu illud sit plusquam infinitum, ut constabit ex dicendis infra *prop.* 10, ubi ipsomet asymptotico spatio hyperbolæ Apollonianæ (cujus respectu VVallisius altiores hyperbolas plusquam infinitas censuit) aliam aream infinities minorem, licèt adhuc absolutè infinitam, invenimus, cujus respectu ipsamet ordinaria hyperbola spatium plusquam infinitum cum asymptoto continet.

PRO-

PROPOSITIO I.

Magnitudinum ejusdem ordinis A, & B, tam summa $A+B$, quàm differentia $A-B$ (posito nempe, quòd A, juxta aliquam assignabilem inæqualitatis rationem, determinatè sit major, quàm B] ejusdem pariter cum alterutra ipsarum est ordinis.

Erit enim, *ex defin.* 6, A ad B in aliqua ratione assignabili, putà *m* ad *n*: quare & componendo $A+B$ ad B, & dividendo $A-B$ ad B, erit in ratione pariter assignabili, $m+n$, vel $m-n$ ad *n*, ideoque, *ex eadem definitione*, tam $A+B$, quàm $A-B$ ejusdem cum B, vel A, est ordinis. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM. Hinc finitum additum finito non facit infinitum: nec duæ, vel tres partes infinitè parvæ finitam magnitudinem aggregant: nec binæ, vel aliquot infinitæ quantitates ejusdem ordinis ullam magnitudinem plusquam infinitam supra talem ordinem efficiunt.

PROPOSITIO II.

Per quemlibet finitum numerum m *quævis magnitudo A multiplicetur, aut dividatur, tam productum* m*A, quàm quotiens* $\frac{A}{m}$, *intra eundem ordinem cum ipso A consistet.*

Nam, *ex præcedenti*, $A+A+A+A$ &c. quoties libuerit, ejusdem semper cum ipso A est ordinis; atqui multiplicatio, ut patet, non est nisi quædam repetita ejusdem quantitatis additio, ergo productum *m*A ejusdem ordinis erit cum ipso A. Simili ratione $\frac{A}{m}$, multiplicatum per *m*, in-

tra

tra eundem ordinem remanebit, sed tunc evadit ipsum A, itaque $\frac{A}{m}$ ejusdem est ordinis cum ipso A; quare &c.

COROLL. Hinc non potest juxta finitum numerum toties sumi quantitas infinitè parva, ut finitam quantitatem aliquando efficiat: idem dic de finita respectu infinitæ, ac de qualibet infinita respectu plusquam infinitæ: idemque vicissim de divisione, ex qua numquam magnitudo ad inferiorem ordinem deprimitur, dictum esto.

PROPOSITIO III.

S*I ratio magnitudinum A ad C major sit qualibet assignabili, non minor erit ratione* 1 *ad* o.

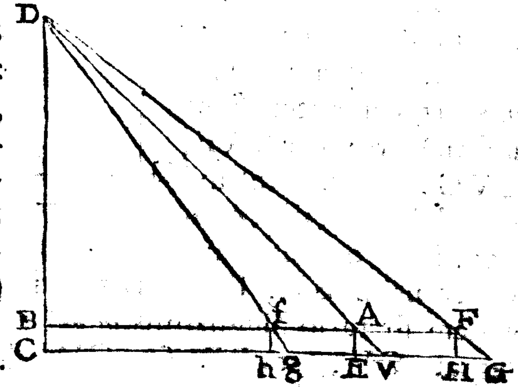
Esto siquidem minor, si fieri potest, puta eadem quæ 1 ad $\frac{1}{m}$ majorem quàm o (intelligendo per *m* quemlibet numerum, quantumvis magnum, qui dividendo unitatem, efficiat fractionem $\frac{1}{m}$ quantumlibet parvam) ergo quia est ut *m* ad 1, ita 1 ad $\frac{1}{m}$, erit ratio A ad C eadem quæ *m* ad 1, adeòque non major qualibet assignabili, contra hypothesim; ratio igitur A ad C non minor est ratione 1 ad o. Quod erat &c.

COROLL. I. Qualibet magnitudo inferioris ordinis, collata magnitudini ordinis superioris, ut merum nihil, in omni rigore, æstimanda est; si enim illa ad istam compararetur, ut aliquid majus nihilo ad unum quidpiam, hæc haberet ad illam rationem minorem quam 1 ad o, cujus oppositum demonstravimus.

COROLL. II. Et ideò nulla inferioris ordinis magnitudo addita magnitudini ordinis superioris, vel ab eadem detracta, hanc auget, aut minuit, sed ejusdem quantitatis relinquit, ad ipsam enim comparatur, ut nihil ad aliquid, unde sicut 1+o, & 1−o æquantur 1, ita finita quantitas per infinitè parvæ additionem, aut subtractionem, non crescit aut minuitur, nec quantitas infinita per accessum, aut recessum finitæ quantitatis, nec etiam (si quæ sint) plusquam infinitæ magnitudines augentur, aut decurtantur per magnitudinem, absolutè quidem infinitam, sed ordinis inferioris; ac in universùm, *magnitudines æquales censendæ sunt, quæ magnitudine dumtaxat infinities minori differunt*, ut in libello *Quadrat. Circ. & hyperb. ad Coroll. prop.* 17. dudum ostendi, & in Scholio ibidem adjuncto generatim admonui, ad hunc ipsum tractatum respiciens, quem vel ex tunc adumbraveram.

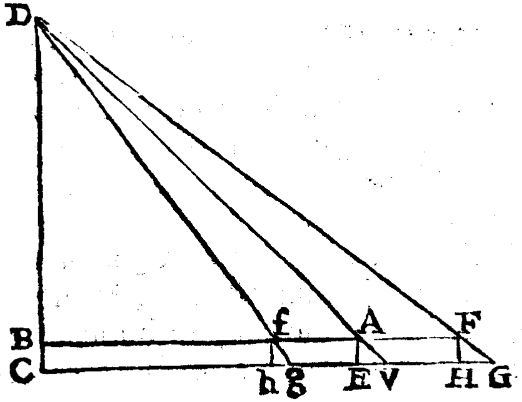
PROPOSITIO IV.

Q*Uantitatum infinitè parvarum, quædam sunt ejusdem ordinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem habere possunt.*

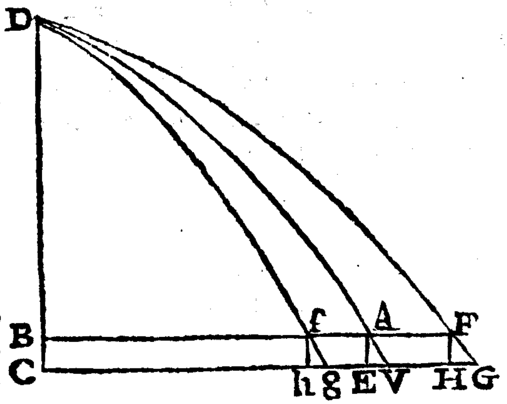


1. Sit primò triangulum D B A, in quo D B æquetur B A, & huic parallela ducatur C V, ipsique propiùs accedere, atque infinitè proxima fieri intelligatur: quomodo tam B C (sive A E illi æquidistans) quàm E V, infinitè parvæ evadent *ex defin.* 4. quippe ad finitas D B, aut B A rationem habere poterunt minorem qualibet assignabili: semper tamen, ob similia triangula D B A, A E V, erit B C, sive A E æqualis E V, ut D B æqualis B A ponebatur. Quod si jam D B ad B F supponeretur habere aliam quam-

quamlibet rationem, putà *m* ad *n*, juncta DFG, & ducta FH ipsi BC parallela, erit similiter infinitè parva BC, vel FH ad infinitè parvam HG in eadem ratione assignabili *m* ad *n*, quam habent ipsæ DB, BF; quare in magnitudinibus infinitè parvis quælibet assignabilis ratio locum habere potest; Quod erat demonstrandum.



2. Sit jam secundò circa axem DB quælibet curva DAV, & alia huic analoga DFG, cujus nempe ordinatæ BF, CG ad ordinatas prioris BA, CV sint perpetuò in quavis constanti ratione assignabili *m* ad *n*. Si ergo, ut antea, fiant infinitè proximæ BAF, CVG, & ductæ sint axi parallelæ AE, FH, constat, ipsas ordinatarum differentias GH, EV fieri infinitè parvas; & tamen cùm eadem sit ratio assignabilis *m* ad *n*, tum integræ CG ad integram CV, tum BF, sive CH ablatæ ad ablatam BA seu CE, erit & reliquæ GH ad reliquam VE assignabilis eadem ratio *m* ad *n*; Quare &c.



3. Patet hinc tertiò etiam trapetia figuræ primæ, seu quadrilinea figuræ secundæ, FBCG, ABCV, [quæ pariter fiunt infinitè parva, pro majori accessu linearum BF,

CG)

CG) futura semper in eadem ratione assignabili *m* ad *n*, quam perpetuò observant, in pari altitudine, quælibet ipsorum ordinatæ GG, CV: ergo &c.

4. Quin etiam quartò, si eadem quadrilinea circa axem BC revolvi intelligantur, orientur hinc trunci conici, seu conoidales, infinitè parvi [nam pro majori accessu planorum circularium, radiis BF, CG descriptorum, hi trunci assignabili quovis corpusculo minores evadent]& tamen semper in ratione assignabili, nempe duplicata ipsius *m* ad *n*, sive dicas, ut *mm* ad *nn*, esse ostendentur, ob circulos à quibuslibet ipsorum quadrilineorum ordinatis FB, AB, sive CG, CV, descriptos, eorundem radiorum quadratis proportionales: itaque & in hoc magnitudinum genere vera est Propositio.

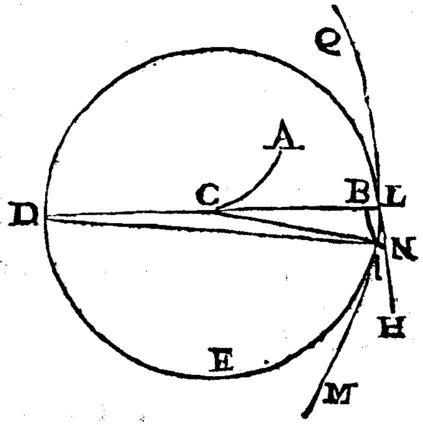
SCHOLION.

Hinc patet eorum hallucinatio, qui magnitudines infinitè parvas pro minimis sui generis habent, illasque sive ut penitus indivisibiles, sive ut invicem æquales considerant. Non solent quidem summi Mathematici in hunc errorem cum vulgo impingere, nec desunt tamen exempla quædam, probantia id posse aliquando Viris etiam in hac arte, atque in hac ipsa methodo, versatissimis, per incogitantiam, excidere. Videat Cl. Varignonius (hujus regulæ certè non ignarus, quam & toties exactissimè observat) an non occasionem præbuerit, suspicandi, calculi perplexitati majorem, quàm legitimo infinitè parvorum usui, attentionem ab ipso impensam, quoties Vires Centrales examinans, aut Radios Evolutarum inquirens, angulum contingentiæ, utpotè infinitè parvum, assumit velut æqualem angulo infinitè parvo, ad centrum osculantis circuli, à binis radiis infinitè proximis constituto, indeque triangula isoscelia considerat, eandemque laterum ad basim proportionem deducit. Vidantur Monum. Academ. Reg. edit. Amstelødam. anni 1700 pag. 301: anni 1701 pag. 27,

31,

31, 34: anni 1703. pag. 252: anni 1706 pag. 245, 293, 647, 652, 656, *atque alibi fortasse.*

Nimirum posita Curva QLM, ejusque Evoluta AC (quam videlicet tangunt prioris curvæ perpendiculares qualibet LC, *l*C) *ductisque radiis infinitè proximis LC, lC ad centrū circuli LED, propositam curvam osculantis (eo quòd sit maximus illi ad punctum L inscriptibilium, eandemque cum ipsa QLM curvaturæ rationem obtineat, circa punctum L ipsi veluti congruens, & cum illa longissime repens) atque intervallo Ll infinitè parvo, descripto arcu lN, occurrente tangenti LH in N, contendit Varignonius locis citatis, similia fore triangula LCl, lLN, unde deducit lN esse tertiam proportionalem post CL, Ll, perinde ac si anguli infinitè parvi lLN, LCl æquales forent, cùm hic potius sit duplus illius; Nam extenso radio LC ad aliam circumferentiæ partem in D, ac juncta Dl, est angulus LCl duplus ipsius lDL* (20. 3. elem.) *huic verò æquatur lLN, qui à tangente LH, & secante Ll [cum arcu Ll ad summùm congruente] constituitur* [22. ejusd.] *adeoque LCl duplus est lLN; quare dictorum triangulorum similitudo, laterumque ad basim prætensa proportionalitas, non subsistit; Imò ducta lB tangenti LN parallela, ostendetur* [coroll. 8. 6. elem.] *Ll media proportionalis inter BL, seu lN, & diametrum LD, non inter illam, & radium; adeòut formulæ ex Varignonii calculo sic instituto prodeuntes, sint duplo majores quàm res exigeret. Atque hæc potius vera origo censebitur differentia inter formulas Virium centralium, anno* 1701 *adductas, à formulis anno* 1706, 24 Aprilis, art. 11, 12, & 13 *inventis, quam differentiam Auctor ipse* pag. 238 *animadvertens,*



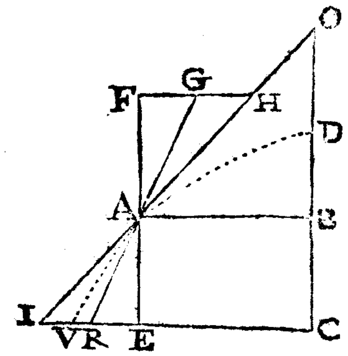
tens,

tens frustrà excusare nisus est, ex quo non tam magnitudinum æqualitas, quàm rationum similitudo in formulis illis exprimeretur, quæ etiam in duplicato, vel utcunque multiplicato ipsarum valore persistit: quod licèt verum sit, genuinum tamen illius variationis fontem non aperit, ex prænotata lege, tunc minùs attentè observata, pendentem; unde licèt in Varignonis casu nullus error denotationem Vis centralis inficiat, eo quòd perinde res se habeat, sive illa reciproca radii colligatur, sive reciproca diametri circuli osculatoris, cùm ipsimet radii sint, ut integræ diametri, tamen, admissa hac arguendi ratione, posset in aliis casibus talis error obrepere, unde falsa penitus conclusio deduceretur.

PROPOSITIO V.

Quædam etiam, ex quantitatibus infinitè parvis, diversi sunt ordinis, atque aliæ aliis infinities majores, aut minores, idque sine ullo limite.

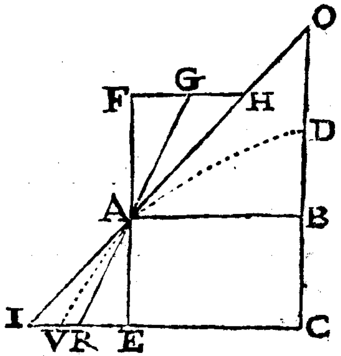
1. Sit primò curva DAV, cujus ordinatæ AB infinitè proxima fieri concipiatur alia CV, & axi DB parallela EA extendatur ultra curvam in F ad aliquam datā longitudinē AF, ducaturque FH ipsi AB parallela, occurrens in H rectę OAI tangenti Curvā propositam in A, & concurrenti cum CV in I; tum divisa FH ad punctum G in quavis ratione assignabili *m* ad *n*, jungatur GA, quæ producta omninò intra curvam cadet (aliàs & ipsa tangeret, quod est absurdum; nec enim duæ rectæ ad idem unius continuæ curvæ punctum illam tangere possunt) licèt post aliquod determinabile intervallum, illam fortasse sit secatura, & ideò ipsam CV, quæ ad inter-



 ter-

tervallum minus quolibet dato ipſi A B accedit, omninò ſecabit inter E & V, velut in R: eritque ratio E I ad I V major ratione ejuſdem E I ad I R; ſed hæc, ob ſimilitudinem triangulorum, eadem eſt, ac F H ad H G, quæ poteſt eſſe quævis aſſignabilis *m* ad *n*, ergo E I ad I V, adeoque & dividendo E V ad V I, rationem habet majorem qualibet aſſignabili, unde *ex defin.* 5. *&* 6. illa infinities major eſt, quàm iſta, & ordinis, ad hanc ſuperioris; Quod &c.

2. Rurſus trilineum ipſum V A I erit infinities minus trilineo E A V, vel E A I (ob baſim V I infinitè minorem ipſa V E, vel E I) necnon ipſorum utrumque adhuc infinities minus eſt quadrilineo infinitè parvo A B C I, vel A B C V, aut A B C E [quia lineæ E V, E I ſunt ipſa A B infinities minores) unde & hinc patet, varios ordines reſultare infinitè parvorum.



3. Quin etiam ſi circa ordinatam B A omnes illæ areæ rotarentur, foret ſolidum à trilineo V A I infinitè minus ſolido à triangulo E A I, vel à trilineo E A V: hoc autem rurſus infinitè minus ſolido à quadrilineis A B C I, A B C V, A B C E genito, nam quælibet ſuperficies cylindricæ, ab V I, V E, E C productæ, fierent eodem ordine aliæ aliis infinities minores; Quare conſtat propoſitum.

COROLL. I. Cum oſtenſa ſit *num.* 1. recta V I minor infinities ipſa E V, hinc eſt quòd juxta *coroll.* 2 *prop. III.* poteſt E V conſiderari ut æqualis ipſi E I, à qua differt differentia infinitè minori.

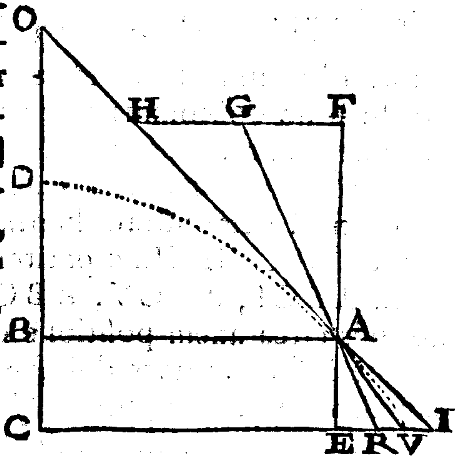
COROLL. II. Unde amplius demonſtratur methodus infinitè parvorum in ducenda cujuſvis curvæ tangente; cùm enim, ob ſimilitudinem triangulorum, ſit I E, ſive illi, ex dictis, æqualis V E, ad A E, ut A B ad B O, ergo ſubtan-

tangens B O eſt ſemper quarta proportionalis poſt differentiam infinitè parvam ordinatarum V E, & differentiam abſciſſarum A E ſeu B C: quare, ſi ordinata vocetur y, & abſciſſa x, adeoque differentiæ earundem ſint dy, dx, erit ſemper ſubtangens $BO = \frac{ydx}{dy}$. Et ex curvæ natura data, cùm innoteſcat ratio dy ad dx (ut mox in ſubiuncto Scholio docebimus) etiam nota fiet ratio B A ad B O, & expeditiſſimè tangens O A determinabitur: ita ut à ſuiſmet principiis myſteria calculi differentialis hoc modo geometricè demonſtrata habeantur.

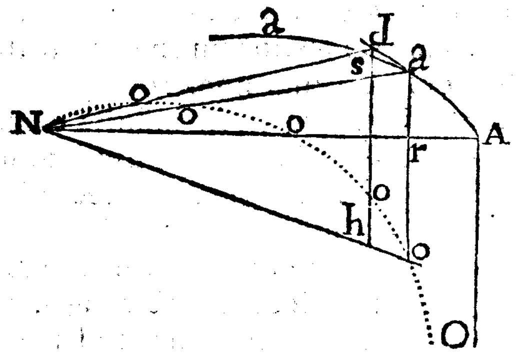
COROLL. III. Hinc pariter colligitur, ipſamet quadrilinea A B C I, A B C V, A B C E [nec non & ſolida, quæ ab ipſis circa axem poſitione datum rotatis gignerentur] utpotè infinitè parvis differentiis diſcrepantia, poſſe pro æqualibus ritè computari, *juxta idem coroll.* 2 *prop. III.* cui fundamento nititur calculus integralis; ex ejus enim præſcripto, ſumma ex rectangulis ordinatarum B A in quaſlibet ſibi correſpondentes differentias infinitè parvas axis B C, æquatur ipſimet areæ curvilineæ C D A V: nec non ſumma cylindrorum, quorum baſes ſint circuli ab ordinatis deſcripti, & altitudines ſint eædem infinitè parvæ differentiæ axis, æquatur rotundo ſolido, ab ipſa figura curvilinea generato: quippe differentia omnis, per indefinitam axis ſectionem, multiplicato eorum rectangulorum, aut cylindrorum numero, & diminuta in infinitùm quantitate ſingulorum, fit infinitè exigua, adeòque evaneſcit.

COROLL. IV. Sed et hinc conſtat, ipſummet arcum A V infinitè parvum, tam rectæ lineæ A V ſibi ſubtenſæ, quàm tangentis portioni A I æqualem eſſe: ſi enim A G tam propè accedere concipiatur ad rectam A H, ut punctis G, H ſibimet invicem fermè congruentibus, utriuſque ipſarū A G, A H differentia minor fiat quavis aſſignabili magnitudine, idem evadat infinitè parva, tunc *ex* 2. *coroll. prop.*

prop. III. fiet altera alteri æqualis; quare et AR æqualis evadet ipsi AI tangenti, multoque magis curva AV utrique interposita [quæ mediæ inter utramque longitudinis est, itaut quamdiu finita fuerit, major quidem ostendatur subtensa recta AV, adeoque & AR, quæ perpendiculo est propior, at minor tangente AI, obtusum angulum AVI subtendente.] fiet æqualis tum ipsi tangenti AI, tum suæ subtensæ AV, & promiscuè una ex his pro alia tutò usurpari poterit, quoties de infinitè parvis sermo fuerit: imò ipsamet curvæ particula AV infinitè exigua, tamquam recta considerari poterit, citra ullum erroris periculum [nam error dum fit infinitè parvus, tandem evanescit, ac nullus evadit] quod significant recentiores Geometræ, dum curvas omnes sub ratione cujusdam polygoni infinitorum laterum spectare nos docent, & curvarū tangentem quamvis pro unius, ex ejusmodi lateribus infinitè parvis, productione æstimādam præscribunt.



COROLL. V. Eodem jure areas curvilineas quandoque licebit in triangula rectilinea infinitè parva resolvere, ad ipsarum dimensionem venandam: veluti si proponatur curva A*aa*, electo ubilibet, sive intra, sive extra curvæ perimetrum, quovis puncto N, atque



atque inde ad singula curvæ puncta ductis ramis infinitè proximis N*a*, N*s*, poterit sector N*sa* pro triangulo rectilineo censeri, quia *ex coroll. preced.* arcus *as* infinitè parvus pro recta assumi potest: & quoniam, extensa N*s* ad tangentem in *d*, portio *sd* aduc infinities minor evadit recta N*s*, adeòque triangulum *asd* est quantitas infinitè parva secundi ordinis, quippe infinities minus triangulo N*sa* jam infinitè exiguo, poterit indiscriminatim etiam N*ad* sumi pro ipso N*as*, & alterutrum ipsorum considerari velut elementum areæ NA*a*, itaut ejusmodi triangulorum summa det mensuram integram talis areæ; Et si talis alia curva O*o*N exhibeatur, cujus rami N*o* sint perpetuò paralleli ad correspondentem prioris curvæ tangentem *ad*, constat fore aream utrique curvæ interpositam *oo*OA*as* duplam semper sectoris correspondentis A*as*N, propter singula parallelogramma *daob* (quæ non differunt ab areolis infinitè exiguis *oaso*, nisi per trilinea infinities adhuc minora *odo*, *dsa*, ob bases *ob*, *ds* infinities minores ipsis *ao*, *sb*, & ideò æqualia invicem censeri debent *ex coroll.* 2 *prop. III. sæpe citato*) dupla triangulorum A*d*N in eadem basi *ad*, iisdemque parallelis *da*, N*o* existentium, ut *cap.* 8. *Hugenianorum* demostravimus.

Obiter autem animadvertere placet, hujus methodi fundamentum, etsi novum videatur, nec absque scrupulo à plerisque admitti consueverit, nimirum: *magnitudines, quarum differentia minor evadit qualibet assignabili differentia, seu quæ differre possunt quantitate iisdem infinities minori, pro æqualibus rectè usurpari*: vetustissimum reipsa esse, ac Veterum methodo, quæ per inscriptiones, & circumscriptiones, longiori circuitu, figurarum æqualitatem, vel aliam proportionem venabatur, necessariò fuisse præsuppositum; Vis enim demonstrationum ejusmodi apud Euclidem, & Archimedem in eo certè consistit, quòd, nisi veræ forent ipsorum propositiones, assignari posset differentia figurarum, nem-

nempe excessus, aut defectus ab asserta mensura: facta autem tali assignatione, cùm per inscriptionem, & circumscriptionem ostendantur alię figuræ minùs excedere, aut deficere à figuris propositis, quàm pro differentia assignata, & tamen assertam mensuræ rationem constanter observare, concluditur ab absurdo, differentiam ab adversario assignatam nullam esse, utpotè minorem qualibet assignabili: atqui hoc ipsum, majori compendio, & nos dicimus, dum magnitudines, differentia infinities minori discrepantes, pro æqualibus habemus: si non sunt habendæ pro æqualibus, assignabilis erit eorum differentia; assignetur ergo: non igitur ipsarum differentia minor evadet qualibet assignabili, quod est contra hypothesim; falsum est ergo, non esse habendas pro æqualibus: Quod est propositum.

SCHOLION.

INvestigatio autem rationis differentiæ ordinatarum ad differentias abscissarum in qualibet Curva, unde tangentium methodum superiùs, coroll. 2. hujus prop. *pendere diximus, sic procedit. Quantitates determinatæ, & ejusdem semper mensuræ, primis alphabeti litteris* a, b, c, e *&c. denotentur: indeterminatæ verò, quæ subinde crescunt, aut decrescunt, per postremas* x, y, z, u *&c. de more exprimantur, ut habeatur æquatio curvæ propria: sic in parabolis, si latus rectum vocetur* a, *& abscissa* x, *ordinata verò* y, *patet, æquationem curvæ propriam fore* $yy = ax$, *propter ordinatæ quadratum semper æquale rectangulo abscissæ in latus rectum: atque ita in aliis magis compositis. Tum supponatur abscissa, verbigratia* x, *augeri portione sui infinitè parva* dx *(sic enim illam exprimere docuit Leibnitzius, ut differentiam ipsius* y *vocat* dy, *& ipsius* z *appellat* dz, *atque ita in aliis) adeò ut evadat abscissa* $x+dx$; *& tum illi correspondere deprehenditur* $y+dy$, *vel* $y-dy$ *pro ordinata (prout videlicet applicatæ crescunt, aut decrescunt ad incre-*

incrementum abscissæ) itaque in æquatione, quæ curvæ naturam determinat, si loco x, *&* y, *ac productorum ex ipsis, vel potestatum earundem, subrogetur* $x+dx$, *&* $y \pm dy$, *eorumque producta, aut potestates; ac mox termini comparentur, quos differentiæ* dx, *&* dy *ingrediuntur, abiectis tum terminis, quos hæ differentiæ non afficiunt [utpotè in vim prioris æquationis, ab initio propositæ, jam æqualibus] tum terminis, quos ingreditur productum ex pluribus differentiis* dx, dy, *sive ad invicem, sive per se ipsas multiplicatis (utpotè infinities minoribus, &* per 2. coroll. prop. III. *æqualitati reliquorum terminorum nihil derogantibus, si abiciantur) habebitur æquatio differentialis, ex qua ratio differentiæ ordinatarum ad differentias abscissarum, nempe earundem* dy, *&* dx, *innotescet. Itaque in æquatione parabolæ superiùs proposita, ubi* $yy = ax$, *habebitur etiã* $yy+2ydy+dydy = ax+adx$; *sed jam* $yy = ax$, *ergo residua pariter æquantur, scilicet* $2ydy+dydy = adx$: *abiciatur* $dydy$, *quod infinities minus est ipso* $2ydy$ *[nam ad illud est in ratione infinitè parvæ quantitatis* dy *ad finitam* $2y$*] manebit adhuc* $2ydy = adx$; *adeòque ut* a *ad* $2y$, *sive ut* y *ad* $2x$, *ita* dy *ad* dx, *& ita consequenter ex supradictis* coroll. 2. hujus propositionis, *ordinata* y *ad subtangentem, quæ ideò dupla invenietur abscissæ* x, *utpotè* $= 2x$.

Aliud exemplum esto in curva, cujus natura definitur æquatione $yy = aa+xx$ *(quæ esset hyperbola æquilatera ad secundam diametrum relata) ergo si* y *evadat* $y+dy$, *&* x *fiat* $x+dx$, *habebitur* $yy+2ydy+dydy = aa+xx+2xdx+dxdx$: *auferantur tum* $yy = aa+xx$, *tum termini infinities minores reliquis* $dydy$, *ac* $dxdx$; *eritque* $2ydy = 2xdx$, *adeoque* dy *ad* dx *erit, ut* x *ad* y, *unde ut abscissa* x *ad ordinatam* y, *ita erit ipsa eadem ordinata* y *ad subtangentem quæsitam, quæ erit tertia proportionalis abscissæ, & ordinatæ.*

Expeditiùs autem sumitur differentia cujusvis æquationis propositę, si in illa ubique termini ab indeterminatis affecti multiplicentur per numerum dimensionis earundem indeterminatarum,

&

& una illarum dimensio in suam differentialem commutetur, loco x, *&* y *scribendo* dx, *&* dy. *Ita enim si* $yy = ax$, *etiam* $2ydy = adx$; *si* $x^3y = a^4 + xxyy$, *etiam* $3yxxdx + x^3dy = 2xxydy + 2yyxdx$, *adeoque per antithesim*, $3yxxdx - 2yyxdx = 2xxydy - x^3dy$: *& sic est* dy *ad* dx, *ut* $3yxx - 2yyx$ *ad* $2xxy - x^3$. *Id quod valet in quibusvis, tam perfectis, quàm imperfectis indeterminatarum potestatibus: adeò ut generatim differentia ipsius* x^m *sit* $mx^{m-1}dx$, *quemcunque numerum integrum, aut fractum, positivum, vel negativum denotet exponens* m.

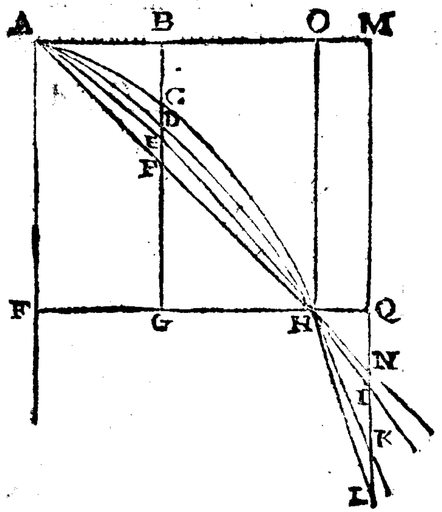
Atque hinc viceversa integratio cujusvis differentialis, seu reversio ad quantitatem, cujus proposita fuerit differentia, habetur, augendo unitate dimensionem indeterminatæ x, *vel* y, *& per eandem dimensionem sic auctam, totum productum dividendo, ut ipsius* $x^m dx$ *summa erit* $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. *Unde eliciuntur innumeræ spatiorum superficialium, & solidorum dimensiones: dummodò advertatur, inventæ summæ persæpe addendam, aut subtrahendam, prout res tulerit, quantitatem aliquam constantem, eo quòd eadem differentia fit duarum quantitatum, sive illis communem jungas, sive demas datam aliquam magnitudinem; Quando autem hæc addi, vel detrahi debeat, invenies, observando, an ubi evanescit quantitas, de cujus dimensione per integrationem obtinenda agitur, pariter evanescat integralis inventa, an quiddam constans inter ejus terminos adhuc supersit, hoc ipsum enim sub signo contrario erit inventæ integrali apponendum, ut verus valor summæ quæsitæ habeatur.*

PROPOSITIO VI.

Q*uod præcedens docuit, aliter per infinitas parabolas demonstrare.*

1. Intra quadratum AFHO, cujus diameter AH, descriptæ sint, eodem latere recto AO, infinitæ parabolæ variorum graduum, nempe AEH quadratica, sive Apollonia-

niana, ADH cubica, ACH biquadratica, &c. adeo ut ducta ubivis recta BCDEPG axi parallela, secante has curvas, & rectam AH, ut in figura, sit semper HO ad

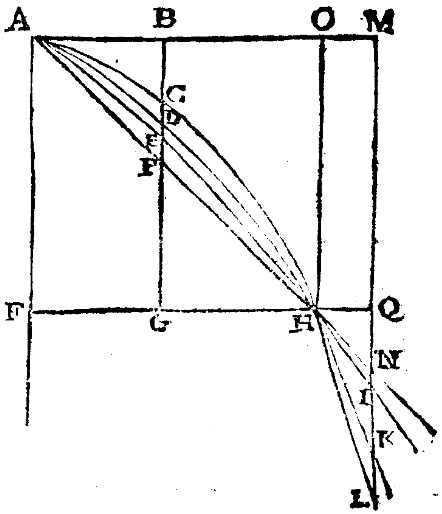


BP in eadem ratione ipsarum OA, AB, sed HO ad BE in earundem ratione duplicata, & ad BD in triplicata, ad BC autem in quadruplicata, atque ita deinceps. Patet ergo, rectas HO, seu GB, & reliquas ejus interceptas BP, BE, BD, BC &c. fore semper continuè proportionales; quare si tam proxima fieri concipiatur BG axi AF, ut intercepta BP evadat infinitè parva, cùm sit ratio GB ad BP eadem rationi BP ad BE, & hujus ad BD, & hujus rursus ad BC, prima autem ratio sit major qualibet assignabili *ex def.* 4. *& convertendo*, etiam reliquæ majores erunt qualibet assignabili, & ideò quantitatum PB, BE, BD, BC, quælibet respectu antecedentis erit, *per def.* 5. *&* 6. infinitè parva, atque inferioris ad ipsam ordinis: quare inter magnitudines absolutè infinitè parvas datur hæc diversitas ordinis: quod erat &c.

2. Angulus contingentiæ BAE est infinities minor angulo rectilineo BAP, & angulus BAD rursus infinities minor est angulo BAE, angulus autem BAC infinities adhuc minor est angulo BAD, atque ita porrò in infinitum, ob subtensas PB, EB, DB, CB, eadem ratione majori quavis assignabili in infinitum decrescentes; datur ergo & in angulis infinitè parvis hæc ordinis diversitas: quod erat demonstrandum.

 3. Area

3. Area ipsa rectanguli infinitè parvi A B G F infinitè major est triangulo A B P, & hoc infinitè majus trilineo A B E, quod ipsum infinitè majus est trilineo A B D, & hoc infinitè adhuc majus trilineo A B C, atque ita deinceps, ob bases continuè proportionales, & ratione majori qualibet data decrescentes; unde patet in superficiebus infinitè parvis hæc diversitas ordinis.



4. Quod si eædem areæ vertantur circa A B, ut à rectangulo A B G F cylindrus, à triangulo A B P conus, à reliquis trilineis fusi conoidales generentur, constat, ex solidis ita genitis, alia aliis infinities minora, ob similem rationem, proditura; quare et in corporibus infinitè parvis variorum ordinum diversitas locum habet; quod erat &c.

COROLL. Ex dictis supra *num.* 2. habetur, quòd sicuti nulla recta linea primum angulum contingentię B A E dividere potest, ut ostendit Euclides *lib.* 3. *prop.* 16. sed tantũ arcus circuli, vel parabolæ, aut alterius lineæ æquicurvæ; ita postmodùm angulum B A D nullus arcus circuli, vel parabolæ quadraticæ dividere potest, sed tantùm arcus parabolæ cubicæ sibi similis, vel altioris ordinis; angulum verò B A C nec ipsa quidem parabola cubica dividet, atque ita de aliis in infinitum: *neque novit natura limitem*, ut ait doctiss. Eques Isaac Nevvton *Princip. Math. Philos. Nat. lib.* 1. *Sect.* 1. *Schol. post lemm.* 11. ubi et notat, binis quibuslibet ejusmodi angulis alios rursus inseri posse me-

medii, inter utrumque, ordinis, idest infinities minores uno extremorum, & infinities majores alio.

SCHOLION.

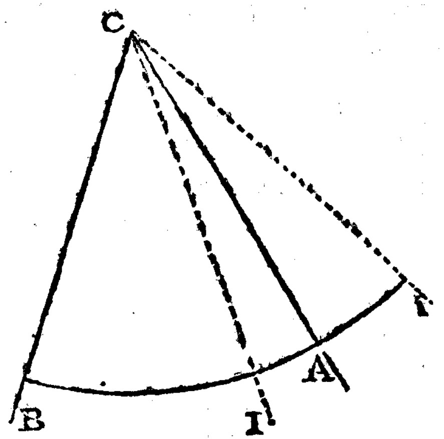
Ex hoc vario infinitè parvorum ordine, innotuit Philosophis, Gravitatem esse vim infinitè parvam respectu Virtutis cujuslibet actu moventis corpus quoddam velocitate nota mensura; si enim hæc Virtus proiiciat mobile per directionem A O, ita ut tempore t *ferri possit ab A ad O, utique dicti temporis particula infinitè parva* dt *illud promovebit per portionem spatii infinitè parvam A B; sed interim Gravitas illud deprimet usque ad parabolam A E H, nimirum per particulam B E infinitè minorem ipsa B F, sive ipsa A B; quare Vis Gravitatis infinities minor censenda erit Virtute dicti proiicientis mobile per A O, siquidem illi respondet effectus infinities minor, quàm huic, dum utraque tempore infinitè parvo, ut æquabiliter operans, concipi debet, nam augmenta velocitatis, quæ tempore infinitè parvo* dt *sibi superaddit Gravitas supra illum infinitè exiguum velocitatis gradum, quo incipit deprimere mobile, utpotè infinities infinitè minora, velut nihil consideranda sunt, donec per tempus finitæ, & notæ mensuræ satis adoleverint, ut jam debeant computari. Idem sequetur in Viribus (siqua sint alicubi) aliorum generum infinities minoribus: nempe si talis species Gravitatis, aut Vis centripetæ concipiatur, quæ corpora acceleret in duplicata ratione temporis, hæc composita cum eadem Virtute projectiva, in temporis differentia infinitè parva* dt *deprimet mobile per B D usque ad parabolam cubicam, dum Vis gravitatis depressisset per B E usque ad parabolam quadraticam; ideoque Vis centripeta dicti generis foret adhuc infinities minor Vi gravitatis, propter motum B D infinities minorem ipso B E. Similiter si Vis centripeta ejus rationis fingeretur, quæ acceleraret mobile in triplicata temporis ratione, constat, quòd hæc, momentaneo tempore* dt, *non nisi per B C ad parabolam quadratoquadraticam deprimeret mobile, unde*

unde adhuc infinities minor præcedenti probaretur. Verùm hæc de infinitè parvis sufficiat breviter attigisse: ad infinitè magna gradum facere convenit, de quibus eadem fermè demonstrabimus, ut nostrum propositum Spatiorum Plusquam infinitorum concludere liceat.

PROPOSITIO VII.

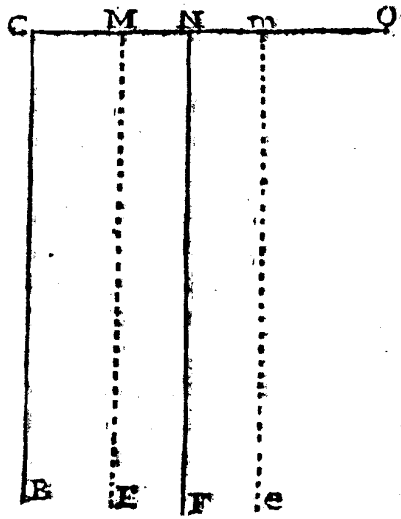
Quantitatum absolutè Infinitarum quædam ejusdem sunt ordinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem habere possunt.

1. Sit enim primò angulare spatium BCA, lineis CB, CA æquè in infinitum productis, per modum infinitè longi sectoris, interiectum, fiat autem angulus BCI ad ipsum BCA in quavis ratione assignabili *m* ad *n*: patet, infinitum quoque spatium interceptum rectis CB, CI æquè in infinitum protractis cum ipsa CA, futurum in eadem ratione assignabili *m* ad *n* ad angulare spatium prius datum BCA: ideoque hæc absolutè infinita spatia ejusdem inter se ordinis erunt, & quamlibet inter se rationem habere poterunt.



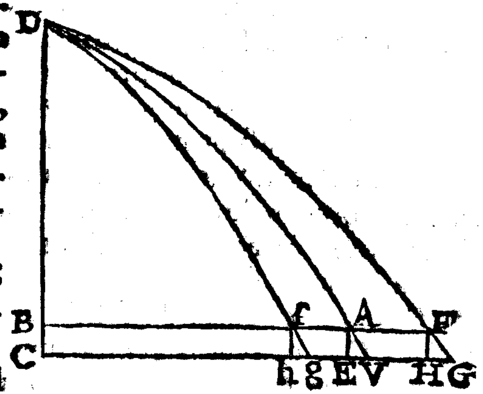
2. Sit rursus (*in figura sequenti*) parallelogrammum infinitè longum BCNF super finita basi CN, & fiat CM ad CN in qualibet ratione assignabili *m* ad *n*, ducaturque ipsis CB, NF parallela ME, eritque infinitè longum parallelogrammum basi CM, lineis CB, ME (æque infinitè productis cum ipsa NF) interiectum, ad prius

parallelogrammum BCNF in eadem assignabili ratione *m* ad *n*, hoc est suarummet basium CM ad CN: quod erat &c.



3. Infiniti cylindri ex conversione parallelogrammorum BCME, BCNF circa CB, erunt utique in ratione basium, quæ duplicata est ipsarum CM, CN, adeoque in ratione assignabili *mm* ad *nn*, quare etiam in figuris solidis vera est propositio: quod oportuerat demonstrare.

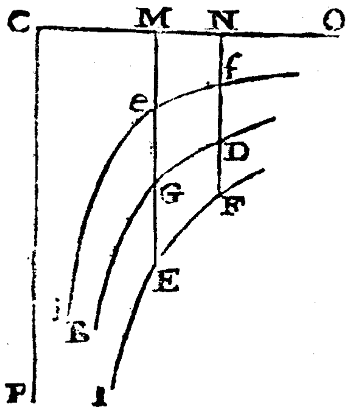
4. In qualibet ex iis figuris, quæ in infinitum amplificantur, ut parabolæ, aut hyperbolæ DAV, circa axem DC, fiat alia figura DFG priori analoga, cujus nempe ordinatæ FB, GC ad ordinatas prioris AB, VC sint semper in eadem ratione quapiam assignabili *m* ad *n*: patet, quòd si utraque cum axe suo in infinitum producatur, erit area infinita CDFG ad infinitam aream CDAV in ratione ordinatarum *m* ad *n*, quæ est ratio assignabilis; ergo idem quod prius.



5. Sed et solida ab his genita circa axem infinitum DC erunt in ratione suarum sectionum circularium, sive ut qua-

quadrata ordinatarum, & ideò in ratione assignabili *mm* ad *nn* unde in his pariter infinitis corporibus obtinet propositio.

6. Inter asymptotos MC, CP posita Hyperbola Apolloniana DGB, fiat alia huic analoga FEI cujus ordinatæ FN, EM ad ordinatas prioris DN, GM sint in quavis assignabili ratione *m* ad *n*, patet infinita utraque spatia NFEIC, NDGBC (ut in Hugenianis *cap.* 8. *n.* 11. & in Quadratura Circuli *prop.* 17. ostendi, atque infra *Epist. ad D. A. L. A. lemm.* 12. demonstrabitur) fore ad invicem in eademmet ratione assignabili ordinatarum *m* ad *n*; quod eandem veritatem confirmat.



7. Imò et quia semper ordinata quævis ME, quantumvis ipsi CP asymptoto proxima, est ad ordinatam MG, ut *m* ad *n*, quidni dicamus, & ipsam asymptoton CI hyperbolæ FE ad asyptoton CB alterius hyperbolæ pariter eandem rationem cæterarum ordinatarum *m* ad *n* habituram? Ergo et in longitudinibus absolutè infinitis locum habere potest quævis assignabilis ratio: quod fuerat demonstrandum.

8. Denique et rotunda solida ab hisce spatiis asymtoticis circa CN conversis genita sunt molis absolutè infinitæ (potest enim ex utrovis resecari versùs basim cylindrus æqualis cuilibet dato *ex coroll.* 18. *Torricell. de Solido Hyperbolico*), & tamen assignabilem inter se rationem observant *mm* ad *nn*, quæ est quadratorum, seu circulorum, qui ab ordinatis genitricum hyperbolarum, ea rotatione, fiunt: itaque infinitæ magnitudines cujuslibet assignabilis rationis sunt capaces: quod &c.

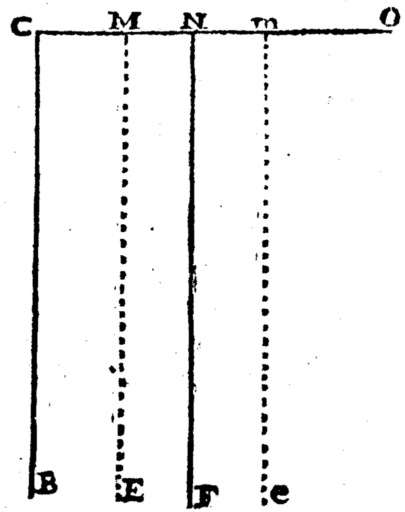
CO-

COROLL. Patet ex dictis *n.* 7. infinitas asymptotos hyperbolarum non semper æquales censendas esse, cùm imò sint ad invicem, ut quæ in pari altitudine ad alteram asymptoton utriusque hyperbolæ ordinantur, sive ut inscripta ipsarum parallelogramma, vel etiam ut earundem hyperbolarum figuræ, quæ à recto, & transverso ipsarum axe continentur: quemadmodum & ipsa hyperbolica spatia sunt in eadem ratione dictarum figurarum, quæ sub axibus continentur; qua in re, ut in plerisque aliis proprietatibus, convenire hyperbolas cum ellipsibus, quæ pariter sunt, ut axium figuræ, notissimum est Geometris.

PROPOSITIO VIII.

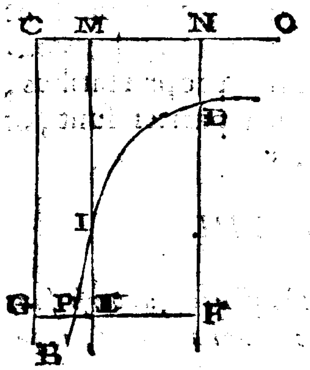
Quadam verò, ex quantitatibus absolutè infinitis, diversi sunt ordinis, atque alia aliis infinities majores, aut minores, idque sine ullo limite.

1. Si primò Spatium angulare BCO, lateribus CB, CO indefinitè productis interjectum: patet, hoc infinities majus fore quovis parallelogrammo infinitæ dútaxat longitudinis CB, sed finitæ latitudinis CM, aut CN, videlicet ipso BCME, aut BCNF, nam in pari omnium longitudine infinita CB, sunt ad invicem, ut latitudines CO, CM, CN, quarum prima ad utramlibet posteriorum habet rationem majoré qualibet assignabili.



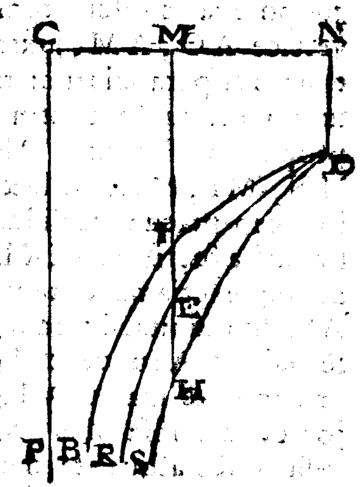
G 2. Sit

2. Sit deinde Spatium CNDIPB, hyperbola Apolloniana DIP [aliave curva asymptotica, quæ cum asymptoto infinitum spatium contineat, cujusmodi est Conchois Nicomedea, & aliæ altioris gradus Hyperbolæ, qua parte ordinatarum potestates majores sunt potestatibus abscissarum] cum sua asymptoto CB infinitè producta comprehensum; & fiat, ut *m* ad *n*, ita NC ad CM, tum agatur ME asymptoto parallela, quæ ipsi curvæ DIP alicubi occurret, velut in I [eo quòd curva semper fiat propior asymptoto, & ad intervallum GP perveniat minus quolibet dato intervallo, CM vel GE] atque ulterius protensa, spatium PIE absolutè infinitum (cujus nempe ordinatæ PE perpetuò crescunt, dum longitudini IE in infinitùm minori applicantur, decrescentibus è contrario ordinatis asymptotici spatii GP) comprehendet; unde si quadrilineo IMDN finito, & bilineo PIE infinito, commune addatur spatium CMIPB, fiet area, CNDIB absolutè minor parallelogrammo infinitè longo BCME: quarè major erit ratio parallelogrammi infiniti BCNF ad infinitum spatium asymptoticum CNDIB, quàm ad infinitum parallelogrammum BCME; est autem ad hoc in ratione basium CN, CM, hoc est, ut *m* ad *n*, ergo BCNF ad CNDIB rationem habet majorem qualibet assignabili *m* ad *n*, & ideò est infinities majus eodem. Quod &c.

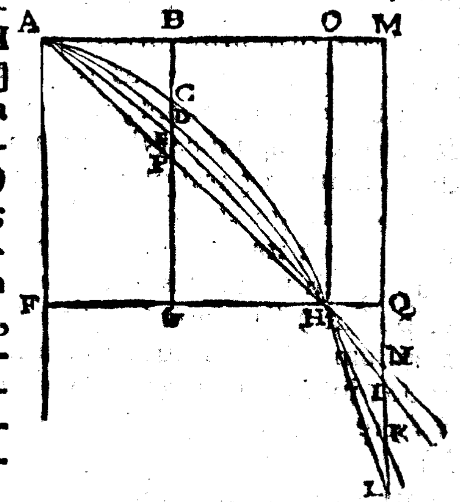


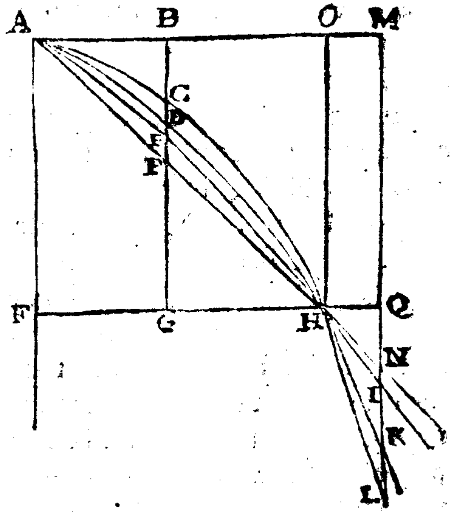
3. Quod si hæc omnia spatia circa CNO converterentur, manifestum est, solidum ab angulari spatio BCO infinitum majus fore cylindro à parallelogrammo BCNF, & hoc rursus infinities majus solido infinito, quod CNDIB produceret: quare et in corporibus infinitis diversi infinitorum ordines observantur.

4. Jam verò si per punctum D, inter asymptotos CN, CB transeant infinitæ hyperbolæ, nimirum linearis, sive Apolloniana DIB, quadratica DER, cubica DHS &c. ita ut rationi NC ad CM æqualis sit ratio MI ad ND, ejusdem verò duplicata sit ratio ME ad ND, & triplicata ratio MH ad ND, & sic deinceps, patet fore in continua ratione ipsas ND, MI, ME, MH &c. ideoque etiam si punctum M cum linea MIEH per ipsum transeunte, continuò accedat, ac tandem congruat puncto C, & asymptoto CBRS, erunt in continua ratione ND ad infinitam CB, ut CB ad infinitam CR, atque ut hæc ipsa ad infinitam CS, unde varii ordines infinitarum longitudinum nascentur, quarum aliæ aliis sunt infinities majores.



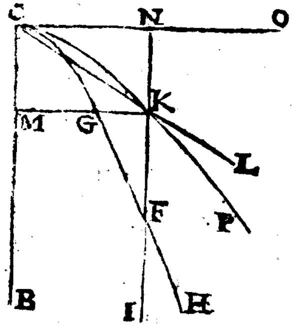
5. Idem ex infinitis Parabolis AEH, ADH, ACH [de quibus *prop.* 6. egimus] ultra nodum H cum recta AH (quę diameter est quadrati illis circumscripti) productis, ostendi potest; ducta enim ipsi HO parallela ML, omnes secante in N, I, K, L &c ut in figura, erit rationis AO, AM, sive OH, MN, duplicata ratio OH, MI, triplicata verò OH, MK, quadruplicata autem OH, ML, at





que ita deinceps (eo quòd præfatæ axi parallelæ sint ex ordine, ut quadrata, cubi, biquadrata, altioresque potestates abscissarum à vertice AO, AM, juxta ejusmodi parabolarum naturam), quare continuè proportionales erunt OH, MN, MI, MK, ML &c. idque in quacunque distantia ducta fuerit MNIKL, adeoque etiamsi distantia AM sit infinita, sive infinitè major OA: undè et MN erit infinitè major OH, & sic MI pariter infinitè major evadet ipsa MN, & MK infinities major MI, & ML ipsa MK, atque ita deinceps sine limite: imò & sumptis, inter binas quaslibet dictarum continuè proportionalium sibi immediatas, mediis proportionalibus, aliæ intermediæ parabolæ orirentur, diversique ordines medii infinitorum prodirent, inter superiùs recensitos.

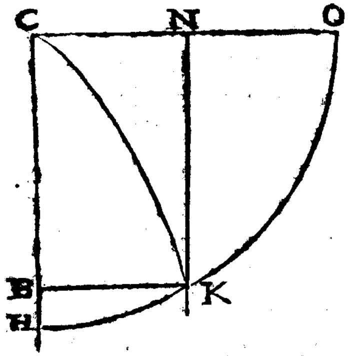
6. Sic ostendi potest, inter spatium infinitum angulare, & infinitè longum parallelogrammum finitæ latitudinis, mediare spatium parabolicum circa suum axem consideratum (uti & spatium ab alia qualibet curva comprehensum, quæ circa axem ita se in infinitum suis ordinatis expandat, ut ejus tamen tangentes quemlibet angulum cum axe continere possint) fiat enim (*in figura sequenti*) angulus BCO ad angulum BCL in quavis ratione assignabili *m* ad *n*: patet, quòd, ipsa CO tangente parabolam CK circa axem CB descriptam, ejus curvæ alicubi occurret CL, velut in K [27. 1. *Conic.*] & ulteriùs protensa continebit cum curva parabolica PK infinitè producta spatium infinitum (quippe



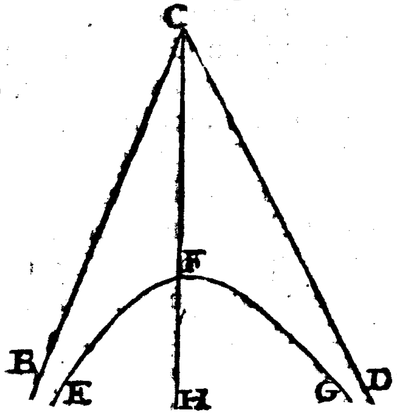
pe cujus latitudo semper augetur) PKL; & ideò spatium angulare BCL, quod à parabolico BCP deficit quidem segmento CK finito, sed illud excedit infinito spatio LKP, erit utique majus eodem parabolico spatio, unde angulare spatium BCO ad illud parabolicum majorem habebit rationem, quàm ad aliud angulare BCL, idest, ex constructione, majorem habebit rationem ad illud, quàm sit quævis assignabilis ratio *m* ad *n*, quare erit illo infinitè majus. At, quia recta NKI axi parallela, nedum secat parabolam CKP in K, sed et aliam quamlibet, quæ circa eundem axem describeretur, sectis singulis ordinatis KM prioris ad punctum G in data ratione *m* ad *n*, qualis esset CGH, secaret eadem axi parallela alicubi in puncto F (26. 1. *Conic.*) eidem non amplius occurrens, unde spatium infinitum resultabit IFH, finitum verò CFN, atque utrivis addito eodem BCGFI, erit majus parabolicum spatium BCFH parallelogrammo infinito BCNI, & ideò parabolicum aliud spatium BCKP majorem habebit rationem ad parallelogrammum BCNI, quàm ad parabolicam aream BCFH, ad quam tamen rationem habet ordinatarum, scilicet *m* ad *n*; unde primum parabolicum spatium superat infinitum illud parallelogrammum, ultra omnem assignabilem rationem, scilicet est illo infinities majus, cùm esset [ex ostensis] angulari spatio BCO infinities minus; dantur ergo diversi infinitorum ordines, ita ut quædam sint aliis infinities majora, aut minora; quod &c.

COROLL. I. Hinc habetur, infinitum Parabolicum Trilineum OCKP, quod ab angulari spatio BCO differt parabolico spatio BCP, ex dictis *num. 6.* infinities minori, ipsimet angulari spatio BCO æquale censeri posse [*ex coroll.*

roli. 2. prop. III.] dummodo æquè in infinitum utraque CO, CB protracta intelligatur [ad modum sectoris OCH]



si enim recta NK, quantumvis distante, axi parallela definiretur trilineum Parabolicum, jam ejusdem ordinis esset cum parabolica area BCP (nempe illius subduplum) non verò illa infinities majus; sed tunc longitudo CB foret infinities major latitudine CN trilinei, quippe ad hanc esset in ratione ipsius CN [quæ infinita supponitur] ad latus rectum propositæ parabolæ, ex generali natura ipsius.



COROLL. II. Omnis hyperbola EFG circa axem FH indefinitè producta, spatium continet infinitum ejusdem ordinis cum spatio angulari à suis asymtotis BC, CD contento, imò illi penitus æquale, differentia enim asymptoticorum spatiorum BCFE, DCFG infinitè minor est (*ex num. 2.*) ipso angulari spatio, imò tot gradibus illo inferior est.

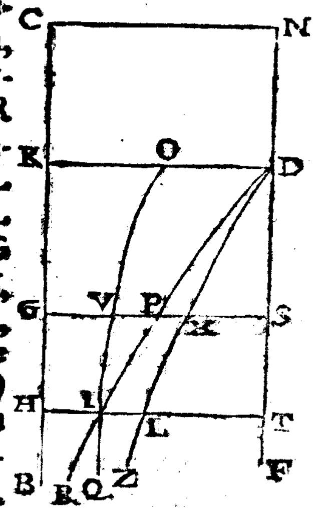
COROLL. III. Et hinc spatium cujusvis hyperbolæ EFG, circa suum axem FH, infinities majus est spatio parabolæ ad eundem axem per ipsummet verticem descriptæ: illud enim ejusdem est ordinis cum spatio angulari, quod ostensum est infinitè majus parabolico.

COROLL. IV. Insuper hinc ratio elucet, cur impossibile sit Hyperbolen Parabolæ inscribere, aut hanc illi circumscribere, sive per eundem, sive per diversos vertices, ut

ut habet Vincentius Viviani *lib. 1. de Max. & Min. prop.* 50; semper enim hyperbola suapte natura major est, quàm parabola, unde nequit illa intra hujus fines concludi.

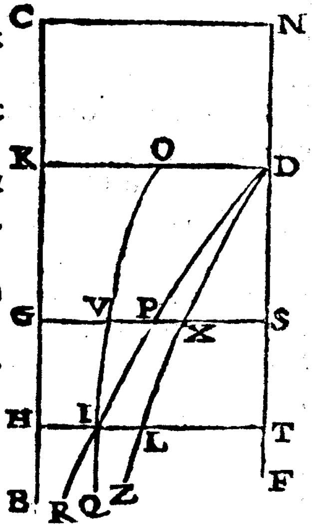
PROPOSITIO IX.

V*Arietatem ordinis Infinitorum item ex infinitis hyperbolis demonstrare.*



1. Esto spatium DPRBK, ordinata D*K* uni asymptoto CN parallela, & altera asymptoto *K*B, atque hyperbola prima, sive Apolloniana DPR infinitè producta comprehensum; transeat verò per idem punctum D intra easdem asymptotos alia hyperbola DXLZ, cujus ordinatarum D*K*, XG quadrata sint reciprocè, ut abscissæ GC, *K*C à centro C, sive ut ordinatæ D*K*, GP ad priorem hyperbolam: eruntque (ducta DF asymptoto CB parallela) ubique in continua ratione D*K* [seu GS] GX, GP. Secetur jam qualibet ordinata posterioris hyperbolæ, nempe D*K*, XG, in punctis O, V in data quavis ratione *m* ad *n*, per quæ puncta intelligatur transire alia curva OVQ ejusdem utique generis cum ipsa DXZ: eritque spatium *K*OVQB ad ipsum *K*DXZB in ratione KO ad KD, sive *n* ad *m*, per constructionem: Porrò, ubi DXZ pervenerit ad intervallum LH æquale ipsi OK, cùm debeat ordinata LH ad ordinatam IH hyperbolæ OVQ esse in ratione DK ad OK, sive TH ad HL, erunt in continua ratione TH, LH, IH, & ideò punctum I erit etiam ad priorem hyperbolam Apollonianam DPR; quare secabunt se curvæ OVQ, DPR in puncto I,

cto 1, non amplius sibi occurrentes, eo quòd ratio HI ad ad BR semper futura est duplicata rationis HI ad BQ, ut de ipsis DXZ, DPR se in puncto D secantibus dicebatur. Et ideò spatium KOVQB, ad partes B infinitè protensum, majus erit infinito spatio KDPRB (nec enim portio OVIPD, qua primum spatium à posteriori deficere videtur, est in his computanda, quippe undecunque finita, adeoque infinitè parva respectu dictorum spatiorum, sed attendi debet excessus QIR absolutè infinitus, ut *in Scholio III.* demonstrabimus) unde minor erit ratio spatii KDPRB ad KDXZB, quàm KOVQB ad idem spatium KDXZB, hoc est quàm sit ratio quævis assignabilis, n ad m; ideòque spatium ab Apolloniana hyperbola comprehensum est infinitè parvum respectu spatii ab hyperbola quadratica definiti, & hoc vicissim, respectu illius (licet absolutè infiniti) est infinitè magnum, & ordinis superioris, sive *juxtà defin. VII.* est *Plusquàm infinitum*; quod &c.



2. Si aliorum graduum superiorum hyperbolæ per idem punctum D describantur, in quibus cubi, vel quadratoquadrata, aut aliæ altiores potestates ordinatarū reciprocè respondeant abscissis, simili modo demonstrabitur, areas hyperbolarum superiorum infinitè majores esse areis inferiorum, quantumvis jam infinitis, vel plusquam infinitis: supponatur enim DPR Quadratica hyperbola, & DXZ cubica, adeò ut hujus ordinatarum cubi, illius verò quadrata reciprocè sint ut abscissæ; fiat autem, proportionali sectione ordinatarum DK, XG posterioris hyperbolæ, alia cubica hyperbola OVQ; eritque spatium KOVQB ad

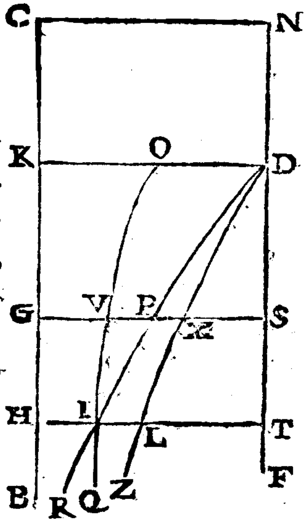
ipsum

ipsum KDXZB in ratione KO ad KD, puta n ad m. Pone jam, curvā DXZ pervenisse ad intervallum LH, quod sit ad HT, vel KD, ut quadratum KO ad quadratum KD, sive ut nn ad mm; occurrat autem hyperbola quadratica DPR ipsi ordinatæ HL in puncto I: eritque HI quadratum ad HL quadratum in ratione composita ex quadrato HI ad quadratum KD [sive ratione cubi HL ad cubum KD, cùm utraque ratio sit reciproca abscissarum CK, CH) & ratione quadrati KD ad quadratum HL, aut cubi KD ad quadratum HL ductum in altitudinem KD; quæ duæ rationes conflant rationem cubi HL ad quadratum HL in KD, nempe rationē HL ad KD, idest *ex constr.* quadrati KO ad quadratum KD. Cùm itaque HI quadratum ad quadratum HL sit ut quadratum KO ad quadratum KD, patet ipsas KD, LH, in O, & I proportionaliter secari, adeòque punctum I pertinere ad cubicam etiam hyperbolam OVQ, quæ propterea secabit ipsam DPR in I, nec illi amplius occurret, eo quòd semper futurum sit quadratum BR ad quadratum HI, ut cubus BQ ad cubum HI, ut antea ostensum est; quare spatium KOIQB, ad partes B infinitè protensum, majus erit infinito spatio KDPRB, ut superiori numero concludebamus, adeòque major erit ratio KDXLZB ad secundum, quàm ad primum, ad quod tamen esse potest in quavis assignabili ratione DK ad KO, sive m ad n; unde liquet, spatium KDXZB infinitè adhuc majus esse spatio KDPRB ab hyperbola quadratica comprehenso, licèt plusquàm infinitum hoc ipsum anteà deprehenderimus. Quod &c.

3. Et si quælibet ipsarum GP, KD potestates ab exponente e indicatæ reciprocè respondeant abscissis, ordinatisve alterius hyperbolæ GX, KD ad potestatem unitate superiorem elevatis, semper his ipsis ordinatis in V, & O proportionaliter sectis, curva OVQ occurret priori hyperbolæ DPR in I, ubi correspondebit ordinatæ posterio-

rio-

rioris hyperbolæ H L, quæ sit ad K D, ut potestas e ipsius K O ad potestatem similem ipsius K D, unde renovabitur semper præcedens argumentum; idque generatim sic ostendetur. Sit K D $= a$ & hyperbolæ D X Z ordinata quævis G X, aut H L ponatur $= y$, quæ si proportionaliter secentur in O, V per curvam O V Q in ratione m ad n, occurrat hæc curva in I alteri hyperbo- D P R, cujus ordinata quævis G P, H I $= z$; ergo in concursu I fiet $z = \frac{ny}{m}$, & $z^e = \frac{n^e y^e}{m^e}$; estque z^e ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, ergo $\frac{n^e y^e}{m^e}$ ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, & $n^e y^e a^{e+1} = m^e a^e y^{e+1}$, & rursus dividendo per $y^e a^e$, erit $n^e a = m^e y$, indeque y ad a, ut n^e ad m^e, nempe ut potestas e ipsius K O ad similem ipsius K D potestatem; Quod &c.



COROLL. I. Hinc constat, omnes hyperbolas altioris gradus supra Apollonianam verè *Plusquam — infinitas* juxta VVallisii appellationem, & doctrinam censendas, utpotè infinities majores areis hyperbolicis ordinariis ad asympton resectis: & quantumvis proportionali augmento, aut decremento singularum ordinatarum, augeantur istæ, minuantur illæ, numquam hyperbolas unius generis posse cum hyperbolis alterius generis comparari.

COROLL. II. Consequens etiam hinc est, in Arearum dimensione non sufficere, ut quædam illarum absolutè infinitæ demonstrentur, sed ampliùs requiri, ut ostendatur ad quem infinitorum ordinem, aut gradum pertineant: Quod facile est, observando ad quod infiniti aliunde noti genus rationem assignabilem habere possint. Verbi gratia

Spa-

Spatium, à Conchoide Nicomedea cum asymptoto contentum, infinitum est ejusdem generis cum Spatio asymptotico hyperbolæ Apollonianæ, cui comparari potest *ex prop. 21. nostri libelli de Quadr. Circ. & Hyperb.* Item spatium à Quadratice Dinostrati ultra quadrantem continuata, & ab ejus asymptoto comprehensum, ad eandem classem spectat, ut ex ejus comparatione cum hyperbola Apolloniana, quam alibi exhibebimus, constare potest. Spatium quod curva Logarithmica, & recta ad ejus asymptoton parallela interiicitur, ejusdem ordinis est cum parallelogrammo infinitæ longitudinis, sed infinities minoris, quàm sit asymptotus Apollonianæ hyperbolæ. Spatium hyperbolicum, circa axem infinitè productum excurrens, ejusdem ordinis est cum infinito spatio angulari. Area curvæ, quæ ab Insigni Geometra Hieronymo Sacherio in *Neostatica lib. 3. pr. 10.* infinita demonstratur, ad asymptotici spatii, quod Apollonii hyperbola complectitur, classem pertinere imò ad ejus dimensionē referri ostenditur: atque ita de aliis.

SCHOLION I.

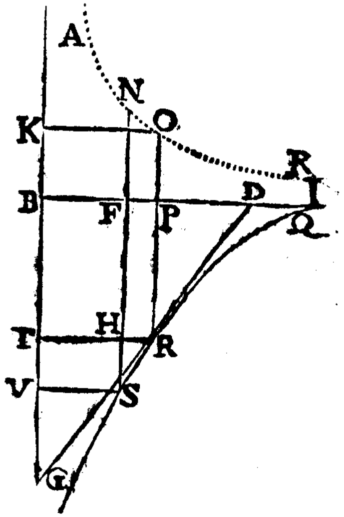
Portet autem in horum Spatiorum comparatione supponere eadem æquè infinitè in longum protensa, aliàs Infinitum ordinis inferioris æquari poterit Infinito superioris ordinis ad infinitam longitudinem inferioris gradus, seu priori infinities minorem applicato; Cùm enim Spatium asymptoticum hyperbolæ Apollonianæ sit infinitum, utique æquivalet parallelogrammis inscriptis multitudine infinitis, quæ si ad parem latitudinem componantur, efficient utique parallelogrammum infinitè longum, ipsi hyperbolico spatio æquale; sed hæc ipsa infiniti parallelogrammi longitudo inferioris ordinis erit, sive infinities minor infinita longitudine spatii hyperbolici: unde non mirum, quòd hoc modo simul utraque spatia adæquentur.

At comparando parallelogrammum æque infinitè longum, ac sit

hyper-

hyperbolicum spatium, quamlibet exigua fuerit parallelogrammi latitudo, semper, ex demonstratis, erit parallelogrammum infinities majus spatio hyperbolico, quod ipsi asymptoto adiacet: idemque intelligas de aliorum, quæ enumeravimus, spatiorum comparatione.

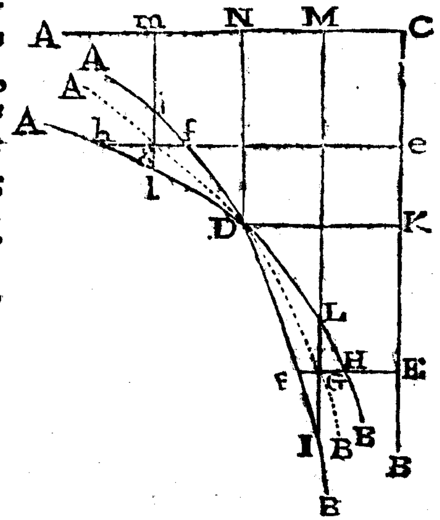
COROLL. III. Undè adhuc habetur, infinitam asymtoton Logarithmimicæ, seu Logisticæ, infinitè minorem esse infinita asymptoto hyperbolæ Apollonianæ. Nam quia Logisticæ Q R S subtangens G T est ad quamlibet axi parallelam, P R, adeoque & quadratum T G ad rectangulum T G in P R, ut rectangulum hyperbolæ inscriptum KOPB ad spatium hyperbolicum QR OP (ordinatis QR, PO interceptum) *ex cap. 6. Hugenian. n. 6.* fit, ut si parallelogrammum hyperbolæ inscriptum æquetur quadrato T G, etiam spatium quodvis hyperbolicum O P Q R æquetur T G in P R, adeòque totum infinitum Spatium hyperbolicum A R Q B A æquabitur rectangulo ejusdem T G in asymptoton Logisticæ infinitè productam B G; Quare, ex præcedenti, erit longitudo ipsius B G infinitè minor longitudine asympoti hyperbolici B A.



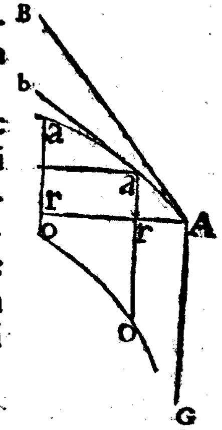
SCHOLION II.

Imò observatione dignum est, Spatia quævis asymptotica finita, longitudini quidem infinita adiacere, sed infinitè semper minori, quàm sit asymptotus hyperbolæ Apollonianæ; Nam & altiores hyperbolæ [in figura sequenti] *AfDFB, qua parte ad asym-*

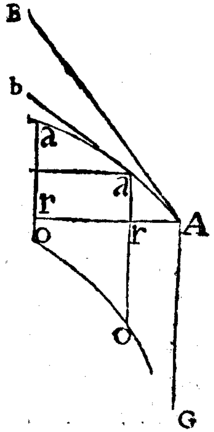
asymptoton C A spatium finitum comprehendunt, asymptoton infinitè minorem, quàm sit hyperbolæ asymptotus, obtinent; eo quòd, cùm sit semper e f *media inter K D,* e g, *erit etiam asymptotus C A hyperbolæ quadraticæ* f *D F, qua parte finitam aream definit, ad asymptoton C A hyperbolæ Apollonianæ* g *D G, in ratione minori qualibet data, qualem habet K D ad priorem C A, qua proportione mediat inter K D, & postremam C A; altioresque hyperbolæ, qua parte finitam aream adhuc minorē cum asymptoto comprehendunt, habebunt, eadem ratione, asymptotos adhuc infinities minores, sive ad inferiorem gradum infinitatis consistentes. Similiter in Cissoide, in Correlata quadrantis, aliisque curvis asymptoticis, finitam areā comprehendentibus, observare erit, infinitā asymptoti longitudinem infinities minorem esse asymptoto hyperbolæ Apollonianæ.*



COROLL. IV. Hinc etiam elici potest modus investigandi, quando Spatium quoddam asymptoticum A*roo*G aream finitam comprehendat, quando verò infinitā, vel adhuc plusquam infinitam, respectu ordinarii loci hyperbolici inter asymptotos jacentis, intercipiat: Si nempe spatio A*roo*G fiat reciproca figura A*aar*, cujus scilicet ordinatæ *ra* contineant cum ordinatis *ro* rectangulum eidem constanti quadrato æquale; nam si tangens *ab* hujus figuræ reciprocæ quæratur, & ejus generalis expressio referatur



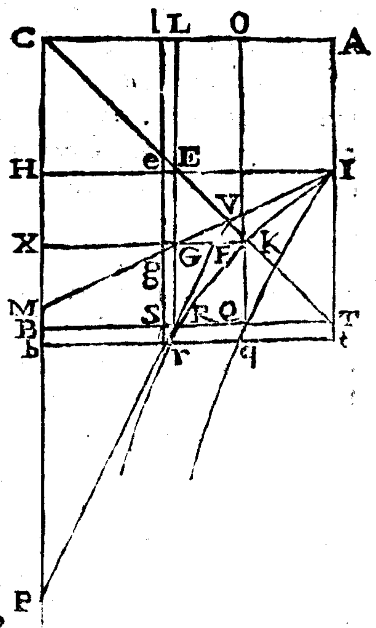
ad



ad verticem A, constabit certè, an ibi tangens AB fiat ordinatæ *ra* parallela, an verò cum ipsa concurrat, in distantia finita ab axe *Ar*, an autem cum ipso axe *Ar* penitus coincidat; & in primo casu Spatiũ A*roo*G finitũ erit: in secundo infinitum: in tertio plusquàm infinitum. Innotescit autem ratio tangentes ducendi ex dictis *coroll.* 2. *prop. V.* undè generatim liquet, reciprocarũ figurarũ semper æquales fore subtangentes, ad oppositã partẽ accipiendas.

SCHOLION III.

INfinitum esse Spatium RIQ, quo secunda hyperbola extra primam exorbitat, sic ostendemus. Duæ hyperbolæ, Apolloniana, seu linearis IKR, & quadratica IQ, per idem punctum I, inter easdem asymptotos CA, CB, sint descriptæ. Ordinetur qualibet BRQT secans lineas, ut in figura. Ducatur asymptoto CB parallela RG, occurrens in G recta IM, tangenti priorem hyperbolam ad punctum I; & ducta RP, tangente ejusdem ad punctum R (quæ producta alteram tangentem ferit in V) acceptoque in eadem prima hyperbola quamvis proximo puncto r, *per illud agantur coordinatis parallelæ* brq, rSg; *ac juncta CT secante primam hyperbolam in K, compleantur parallelogramma COKX, CBRL, AIHC. Jam propter AI,*



sive

*sive CH ad CB, ut BR, sive HE ad CA vel BT, erit parallelogrammum CHEL simile ipsi CBTA, adeoque circa eandem diametrum CT consistet; quare & CT erit diameter hyperbolæ RKI, ut potè bisecans subtensam RI, quæ altera diameter est parallelogrammi ERTI, quare eadem CT per tangentium occursum V transibit: ex 29. 2. Conic. Prætereà cùm sit AC, sive BT, ad KX, ut BC ad CX, sive ut KX ad BR, erunt BT, XK BR in continua ratione, & BT vel HI ad tertiam BR, ut quadratum primæ HI ad quadratum mediæ XK; sed ex natura hyperbolæ secundæ, ut HI ad RB, ita & quadratum HI ad quadratum BQ, ergo XK æquatur BQ, & juncta QKO erit asymptoto parallela. Cùm sit autem GF (quæ ipsi RQ parallela ducitur ex puncto G, & à tangente RV in puncto F limitatur: nec enim semper coincidet GF cum ordinata KX, ut hoc loco Sculptor expressit] minor semper ipsa RQ, metiente intervallum parallelarum RG, QK; consequens est, ut major sit ratio RQ ad RG, quàm GF ad eandem RG, vel (ob similitudinem triangulorum FGR, RBP] quàm RB ad BP, aut RS ad S*r; *ideoque majus erit rectangulum QR in S*r *(nempe elementare spatium Qq*r*R) rectangulo GR in RS (nempe spatio R*rg*G); quare & totum bilineum QIR majus erit trilineo RIMP: quod cùm sit infinitum [ob infinitatem asymptotici spatii primæ hyperbolæ] patet à fortiori infinitum fore & bilineum QIR; Quod erat demonstrandum.*

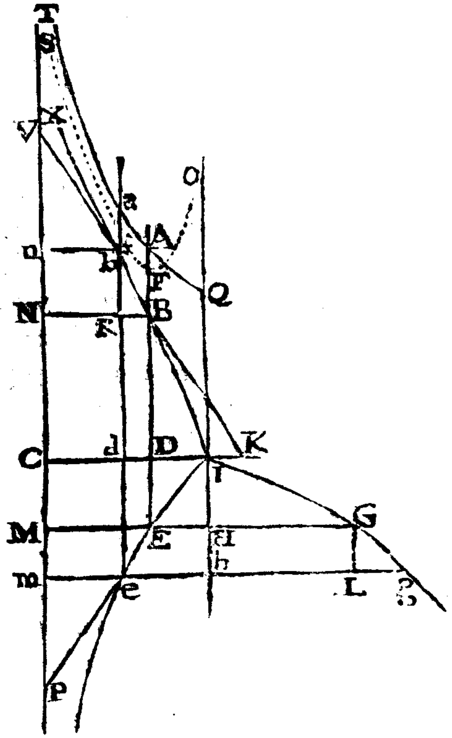
PROPOSITIO X.

S*Patium Infinitum, idemque infinities minus Asymptotico Spatio Apollonianæ Hyperbolæ, reperire.*

Ne quis suspicetur, spatium asymptoticum hyperbolæ Apollonianæ minimum esse omnium infinitorum spatiorum, quia nullam hactenus aream novimus infinitam, quæ aut ejusdem, aut superioris gradus non sit ad prædictum spatium: libet hoc loco aream describere, absolutè quidem

infi-

infinitam, sed infinities minorem dicto asymptotico spatio Apolloniano: ex quo facile erit similes areas adhuc infinities minores excogitare, & assertam varietatem ordinis Infinitorum *sine ullo limite* (ut *prop. VIII.* prędiximus) admittendam ostendere.



Inter asymptotos CI, CV descripta sit hyperbola Apolloniana QAaT, abscindēs primam ordinatam QI ęqualem IC; & subtangente CI agatur Logarithmica IEe ad axem CP, cui parallela posita IH, fiat ad axem IH parabola IGg, cujus latus rectum sit duplum ipsius CI, & productis ejus ordinatis GH, gh, logarithmicę occurrentibus in E, e, ejusque axi in M, m, agantur ad axem parallelę EDA, eda; tum ut rectangulum ex ME in HG ad quadratum CI, ita sit eadem CI vel IQ ad DF, ac per omnia puncta F, f sic determinata transeat curva OFfS. Dico spatium binis asymptotis parallelis IO, CS, curva OFfS, & recta CI comprehensum, absolutè quidem esse infinitum, sed infinities minus spatio hyperbolico CIQAaT.

Facta enim DB æquali HG, itemque db æquali hg, atque ita semper, oriatur hinc alia curva IBbX; sintque AFBDEHG, $afbdehg$ infinitè proximæ: erit ipsarum BD, bd differentia bR, ex constructione, æqualis differen-

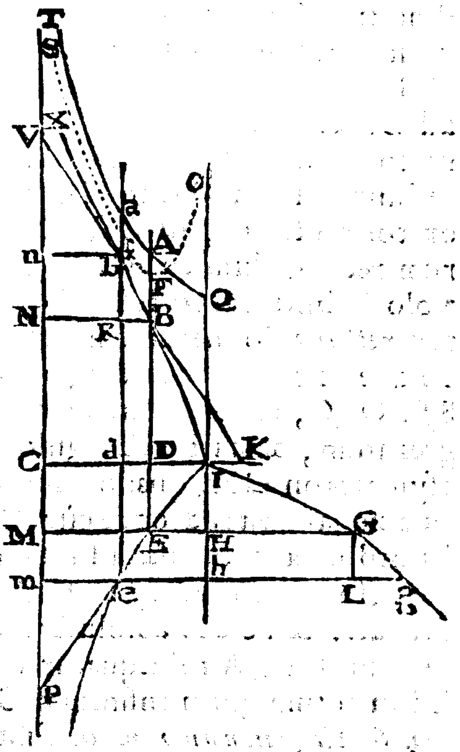
tiæ

tiæ Lg correspondentium HG, hg; eritque BR ad Rb,
ut BR ad Lg, nempe in ratione composita ex BR, seu
Dd differentia ordinatarum Logarithmicæ, ad Hh, sive Mm
differentiam axis ejusdem, & ex Mm, seu GL differentia
axis parabolæ ad Lg differentiam ordinatarum ejus; est
autem ex *coroll. 2. prop. V.* prima ratio æqualis rationi or-
dinatæ ME ad subtangentem MP vel CI, & ratio altera
æqualis rationi subtangentis parabolæ, seu duplæ IH, ad
HG, vel duplæ HG ad latus rectum, aut simplicis HG,
ad CI semissem lateris recti; ergo BR ad Rb est in ratio-
ne composita ex ME ad CI, & HG ad CI, scilicet ut
rectangulum ex ME in HG ad quadratum CI, hoc est,
ex constructione, ut CI, vel IQ ad DF; quare extrema-
rum rectangulum ex FD in BR (quod est idem cum spa-
tiolo infinitè parvo FDdf, *per coroll. 3. prop. V.*) æquabi-
tur rectangulo mediarum IQ vel CI in Rb; quod cùm
ubique perpetuò obtineat, manifestum est, totum spatium
SfFOIC, ex omnibus areolis elementaribus FDdf ag-
gregatum, æquari rectangulo ex IQ vel CI in totam
asymptoton CX, quæ omnibus differentiis Rb ordinata-
rum æqualis est: adeoque cùm CX sit infinita, utpotè æqua-
lis ordinatæ parabolæ ad infinitam distantiam à vertice,
patet, spatium illud SfFOIC rectangulo infinito æquale
probari, & sic esse absolutè infinitum: sed hyperbolicum
spatium CIQAaT æquatur rectangulo ex eadem IQ, vel
CI in totum axem infinitum CP Logarithmicæ (nam, ex
cap. 6. Hugenianorum n. 6. subtangens CI est ad quamli-
bet DE parallelam axi Logisticę, vel dicas CI quadratum
ad CI in DE, ut parallelogrammum hyperbolę inscriptū
CDA, quod ęquatur quadrato CI, propter QI æqualem
CI, ad spatium hyperbolicum AQID, quod exinde ęqua-
bitur in hoc casu rectangulo ex CI in DE, adeoque to-
tum spatium asymptoticum fiet æquale rectangulo ex CI
in totum axem CP) erit ergo spatium CIQAT ad spa-

I tium

tium SFOIC, ut infinitus axis Logarithmicæ, vel parabolæ, ad infinitam ejus ordinatam, sive ut hæc ipsa infinita parabolæ ordinata ad suum latus rectum; adeoque in ratione majori, quàm quælibet assignabilis, quarè inventum est spatium absolutè infinitum, sed idem infinities minus asymptotico spatio hyperbolæ Apollonianæ. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc obiter patet, curvæ IBb subtangentem KD esse ad ordinatam DB, ut rectangulum ME in HG, sive NCDB, ad quadratum CI: in hac enim ratione vidimus esse differentias BR, Rb, quæ sunt subtangenti, & ordinatæ proportionales ex supradictis.



COROLL. II. Unde etiã extensa tangente KB ad asymptoton in V, erit pariter BN ad NV (seu sumpta communi altitudine NC, rectangulum NCDB ad rectangulum CNV) ut rectangulum NCDB ad quadratum CI; quare quadratum CI equabitur CNV rectangulo, & subtangens NV æquatur constanti quadrato CI, diviso per abscissam NC, idest reciproca est abscissæ NC, aut dicas æqualis ordinatæ in puncto N ad hyperbolam TAQ, usque dum illi occurrat, continuatam, quippe quæ pariter ejusdem NC est reciproca.

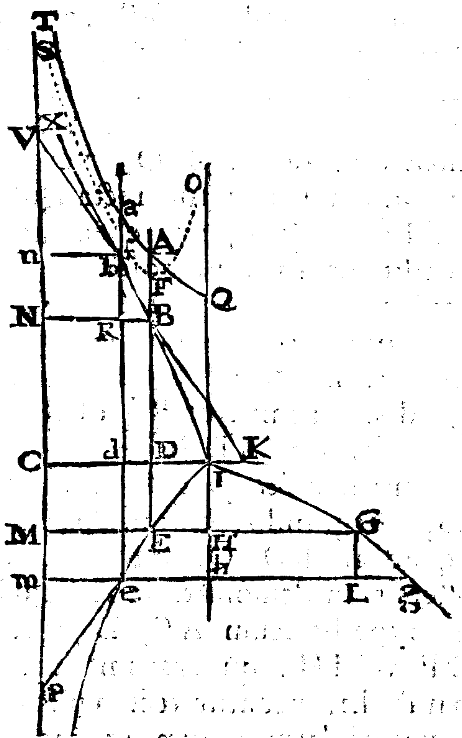
COROLL. III. Si quis ex puncto B duceret curvæ IBb perpendicularem, foret subnormalis, post ordinatam BD

in ipsa DC producta ab hac perpendiculari resecta, æqualis ordinatæ DA hyperbolæ: etenim est VN ad NB, ut BD ad DK, vel ut prædicta subnormalis ad ordinatam BD seu CN, adeoque rectangulum extremarum VNC [hoc est, *per præcedens corollar.* quadratum CIQ, vel rectangulum CDA, ob hyperbolam) æquatur rectangulo mediarum NB, vel CD in subnormalem, quare eadem subnormalis æquatur AD ordinatæ ad hyperbolam.

COROLL. IV. Unde ampliùs ostendi potest, spatium hyperbolicum AQID æquari dimidio quadrati ex ordinata BD: posita enim CD $= x$, DB $= y$, & dicta subnormali $= p$; erit p ad y, ut dy ad dx (nempe ut Rb ad RB) quare pdx [sive, ob $p =$ AD, spatium ADda] $= ydy =$ dimidio differentialis $2ydy$, quæ *ex Schol. prop. V.* est differentia quadrati yy; & ideo, integrando, totum spatium AQID æquatur dimidio quadrati BD. Quod & hinc expeditiùs patet, quià ex ostensis in demonstratione hujusmet propositionis, spatium hyperbolicum AQID æquatur rectangulo ex CI in DE, vel IH, quadratum autem BD, vel HG, ex natura parabolæ, æquatur rectangulo ex eadem IH in duplam CI, quæ est latus rectum, ergo idem spatium hyperbolicum AQID est dimidium quadrati HG, vel BD.

SCHOLION

M*anifestum est, curvam* IBb *esse Logarithmicam quadraticam, ex earum genere, quas* Hugenianorum cap. 1. n. 4. *indicavi, de quibus & egregium tractatum, genesi à nobis perhumaniter accepta, conscripsit insignis Geometra* Laurentius Lorenzini, *quem utinam cum aliis tractatibus, res geometricas accuratissimè, & profundissimè illustrantibus, typis aliquando committeret! Enimverò patet, quòd cùm in prima Logarithmica IE e sit ratio* IC, ME *ad rationem* IC, m e, *ut*

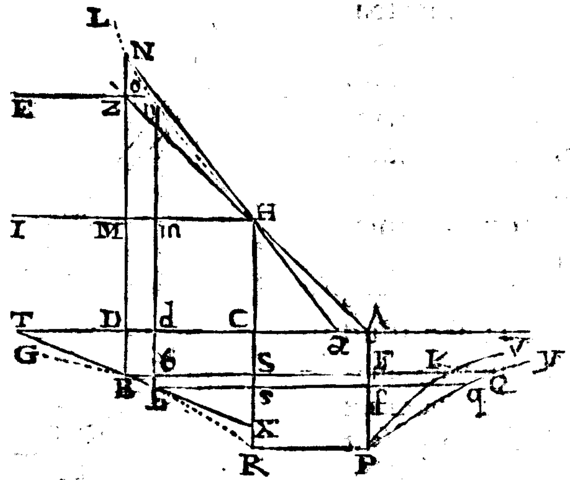


CM ad Cm, vel IH ad Lh: cujus rationis ſubduplicata eſt ratio ipſarum HG, hg, ſeu BD, bd, patet fore BD ad bd, ſive NC ad nC, in ſubduplicata ratione ejus, quam habet ratio duarum CI, NB ad rationem duarum CI, nb; aut illam rationem ad hanc eſſe, ut quadratum diſtantia CN ad quadratum diſtantia Cn. Similiter, ſi loco parabola quadratica IGg poſita fuiſſet alterius altioris ordinis parabola, ex ejus ordinatarum HG translatione in DB, orta fuiſſet altioris adhuc ordinis logarithmica, ejuſque tangens, & alia functiones ſimili inveſtigatione detegentur.

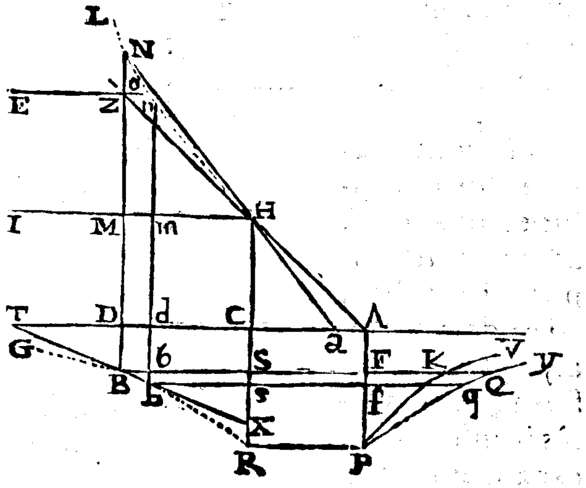
PROPOSITIO XI.

QUadratica hyperbola cum Apolloniana ſpecialior comparatio, ad ejus altiorem infinitatem demonſtrandam.

Sit inter aſymptotos RCA [*ut in figura ſequenti*] per angulum P quadrati RPAC deſcripta hyperbola Apolloniana PKV, & hyperbola quadratica PQY, in qua ſit SQ ad RP, ut quadratum RC ad quadratum CS, vel ut quadratum SK ad quadratum RP, adeoque tres SQ, SK, RP ſint perpetuò proportionales; deſcripta ſit etiam ad axem ACT Logiſtica RBG, ad partes G decreſcens, cujus



jus ſubtangẽs TD æquetur CR: iteq. facta CH æquali CR, ponatur HNL continuatio ejuſdem Logiſticæ, quæ ex R ad partes AP exporrigi debebat, ad eaſdem partes aſymptoti CT reflexa, & eò verſùs in infinitum ſe expandens. Itaq. ob æqualem, imò eandem axis portionem CD, ordinatis BD, CR, & CH, DN interceptam, erit ſemper DB ad CR, ut CR vel CH ad DN, ſed etiam ut DB vel CS ad CR, ita in hyperbola Apolloniana RP (vel CR aut CH) ad SK, ergo DN æquatur ſemper correſpondenti ordinatæ hyperbolicæ SK: factaque *ndbsq* infinitè proxima priori; cùm ſit SQ ad SK, ut SK ad RP, vel ut AC ad CS, vel ut TD ad DB, vel ut B6, aut D*d*, ad 6*b* vel *s*S, erit rectangulum extremarum QS*s* æquale rectangulo mediarum, ſcilicet SK, vel ND in D*d*, & ſic ſemper, unde ſpatium hyperbolæ quadraticæ SRPQ *per coroll. 3. prop. V* æquale oſtendetur correſpondenti ſpatio Logiſtico NHCD; ſed ex oſtenſis *in demonſtratione prop. præced. & in coroll. 3. prop. IX.* Spatium hyperbolicum SRPK æquatur rectangulo ex CR in logarithmum CS, ſcilicet in BS, hoc eſt, ducta HMI aſymptoto parallela, æquatur rectangulo correſpondenti CHMD, ergo ſpatia SRPQ, SRPK ſunt ſemper ad invicem, ut NHCD, MHCD; & ubi punctum S cadit in C, erit totum ſpatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY ad ſpatiũ Apollonianæ CRPKV, ut



ut logisticum spatium TCHNL in infinitam amplitudinè TL infinitæ longitudini CT respondentem diffusum, ad rectangulum infinitè longum TCHI; sed illud est infinities majus hoc, nam ex ipso secari possūt quot quis voluerit æqualia rectangula infinitè longa TCHI, IMZE, &c. ergo & Spatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY est infinities majus spatio Apollonianæ hyperbolæ absolutè infinito CRPKV, adeoque jure potuit à VVallisio *Plusquam infinitum* nuncupari. Quod erat &c.

COROLL. I. Cùm *ex nostris Hugenianis cap.* 3. *n.* 6. Spatia Logistica æquè alta NDCH, BDCR sint ad invicem, ut homologæ ordinatæ CH, BD, sive ut rectangulum CHMD ad rectangulum CDBS, & permutando spatium NDCH ad CHMD, hoc est, juxta hanc propositionem, spatium SRPQ ad SRPK, erit, ut spatium logisticum BDCR ad inscriptum rectangulum CDBS.

COROLL. II. Extensa tangente TB usque ad CR in X; quoniam ex dictis *Hugenianor. cap.* 7. *n.* 3. & *cap.* 10. *n.* 8. rectangulum CDBS æquatur rectangulo subtangentis DT, vel CR in SX, & spatium BDCR *ex ibidem dictis cap.* 4. *n.* 3. *&* *cap.* 8. *n.* 14. æquatur rectangulo ejusdem subtangentis in SR, erit itaque spatium SRPQ ad spatium SRPK ut SX ad SR.

COROLL. III. Unde rursus liquet, integrum spatium hy-

hyperbolæ quadraticæ CRPQY esse infinities majus spatio Apollonianæ CRPKV, adeoque *plusquam infinitum* censendum; etenim ubi S cadit in C: tum rectangulum CDBS evanescit, aut saltem fit infinitè minus spatio integræ logisticæ TCRBG, seu quadrato subtangentis CR: tum ipsa SX evadit infinitè parva respectu SR, quæ tunc fit CR; undè spatiū hyperbolę Apollonii CRPKV, evadat infinities minus spatio hyperbolæ quadraticæ CRPQY necesse est.

COROLL. IV. Rursus, quia spatium SRPQ ad SRPK ostensum est esse, ut NDCH ad MDCH; est autem NDCH æquale rectangulo ex subtangente logisticę CH in MN, erit primum spatium ad secundum, ut NM ad MH; sed NM ad MH potest rationem habere majorem qualibet assignabili, si concipiatur accedere magis, ac magis punctum S ad centrum C, adeoque ab eodem C magis ac magis recedere ordinata logisticæ DN, nam MN ultra tangentem HZ, quæ ad angulum semirectum ZHM, sive HAC inclinatur, in immensum excrescit, unde ratio NM ad MZ, vel MH, semper fit major, prout (juncta NH*a*) fit semper sine limite major ratio HC ad C*a*; ergo NM evadit infinities major, quàm MH, ubi punctum S cum puncto C convenerit, & ideo spatium CRPQY erit tunc infinities majus ipso CRPKV, ac proinde *plusquam infinitum* hac etiam ratione colligitur.

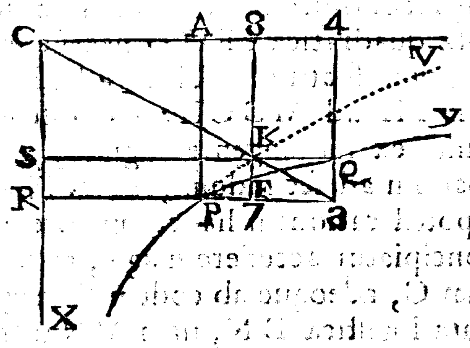
SCHOLION.

E*X ostensis in hac propositione, quòd DN, ordinata figuræ HNL, sit semper æqualis correspondenti SK, ordinata hyperbolæ PKV, colligitur expeditus modus generalis describendi datæ cuilbet figuræ RBG suam Reciprocam HNL: descripta enim hyperbola Apolloniana PKV, quia semper rectangulum CSK æquatur ipsi CRP, fit, ut si ad puncta D, C ordinentur ipsę DN, CH æquales respectivè ipsis SK, RP, utique etiam rectangula NDB, HCR æquentur, adeoque figura HNL evadat Reciproca ipsius RBG.* PRO-

PROPOSITIO XII.

I*Dem aliter rurſus, ad abundantiorem ſcientiam, demonſtrare.*

Iiſdem poſitis, ducatur C*K*, conveniens cum RB producta in 3, & jungatur 3Q occurrens aſymptoto CA in 4; eritque R3 ad S*K*, ut RC ad CS, ut S*K* ad RP, vel ut SQ ad S*K*; igitur æquales erunt R3, SQ, unde 3Q4 erit aſymptoto RSC parallela, cui per *K* æquidiſtans pariter fiat 7*K*8; jam verò ex demonſtratis *cap.* 8. *Huggenianorum*, *n.* 11. Spatium infinitè longum, ab hyperbola quadratica PQ ad partes aſymptoti SR versùs X infinitè producta comprehenſum, eſt finitæ quantitatis, & ſemper æquatur inſcripto rectangulo eidem ordinatæ adiacenti, nempe RSQPX æquatur CSQ4, & ſolum RPX æquatur CRPA, vel huic æquali CSK8; ideoque utriuſque differentia, nempe ſpatium SRPQ æquatur reſiduo 84QK, vel æquali complemento SK7R, quod eidem latitudini SR adiacet cum ſpatio SRPQ, ſed longitudinem habet æqualem applicatæ correſpondenti SK hyperbolæ Apollonianæ, atque ita ſemper; ergo ubi congruerit SK aſymptoto CA, fiet integrum ſpatium CRPQY æquale rectangulo ex CR in aſymptoton hyperbolę Apollonii CAV; ſed hoc rectangulum, *ex prop. VIII. n.* 2. eſt infinities majus ſpatio asymptotico hyperbolæ Apollonii, ergo ſpatium CRPQY quadraticę hyperbolę eſt infinities majus dicto ſpatio Apollonianę hyperbolæ, unde à Cl. VVallisio jure *Pluſquàm Infinitum* dici potuit. Quod erat &c.



CO-

COROLL. I. Ex quo ſpatium SRPQ oſtenſum ſit æquale rectangulo S*K*7R, ablato communi SRPEK, erit KEQ = ipſi KEP, & appoſito communi 7EQ3, fiet PEQ3 æquale K73Q.

COROLL. II. Unde & ſpatium SRPQ ad PEQ3 erit, ut 8KQ4 ad 7*K*Q3, nempe ut CS ad SR, & componendo, RSQ3 ad PEQ3 erit, ut CR ad RS, ac per converſionem rationis, RSQ3 ad SRPQ, ut CR ad CS.

COROLL. III. Quia verò ſpatium SKPR = rectangulo ex CR in logaritmum CS (*vide fig. pag.* 70.) nempe in SB *ex coroll.* 3. *prop. IX.* erit SKPR ad SQPR in ratione composita ex CR, vel RP, ad SK, & ex logarithmo CS, nempe SB, ad SR, ideſt in compoſita ratione ex SC ad CR, & SB ad SR, hoc eſt ut rectangulum Logiſticæ inſcriptum CSBD ad rectangulum ex CR in RS, ſive ad Logiſticum ſpatium CDBR; quod conſonat jam oſtenſis *coroll.* 1. *prop. præced.* unde rurſus eadem inferri poſſunt, quæ deinceps in ſequentibus corollariis demonſtrata ſunt de *altiori Infinitate* hujus ſpatii.

SCHOLION.

H*Actenus multipliciter probavimus diverſitatem ordinis Infinitorum a Varignonio controverſam, idque iis argumentis, quibus ſubeſſe poſſe hallucinationem, de ſumenda expreſſione ſpatiorum ejuſmodi ad contrarias partes, omninò non video; hac enimverò exceptione Vir graviſſimus uſus eſt adversùs VVallisium, ſcilicet ipſum non obſervaſſe, negativum valorem arearum hyperbolicarum ſuperiorum Apollonianæ, non indicare altiorem infinitatem ipſarum, ſed contrariam dumtaxat poſitionem, adeout finitam quidem quantitatem exprimat, ſed ad oppoſitas partes accipiendam: quod ipſum antea monuerat* Georgius Cheynęus *Collega noſter, libro Londini impreſſo* 1703 De Methodo Fluxionum inverſa, pag. 66. *his verbis*: Quodſi quadraturæ ex-

K

preſ-

pressio affirmativa fuerit, area adjacet tam abscissæ, quàm ordinatæ: sin negativa fuerit, cadit ad partes contrarias, & adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ: *ubi etiam statim subdit exemplum* infinitarum hyperbolarum. *Quam sanè legem nos minimè improbamus, & saltem in hyperbolarum casu (ex accidentine, an suapte generali natura, hic non inquiro, sed vide dicenda infra* in Epist. subjuncta post Lemm. 12.) *obtinere fatemur: quemadmodum & idem, independenter à Cheynæi libello ipsis nondum viso, animadvertendum censebant anno* 1704 *Doctissimi Viri, quos Bononiæ conveneram, & quibuscum de hac Infinitorum materia, deque natura negativarum quantitatum in Marsiliano Musæo disserebam, videlicet* Eustachius Manfredi *Matheseos Profess. celeberrimus, &* Victorius Stanchari, *quem Geometria, Analytica, Physica, & Astronomia sibi nunc [heu nimis immatura!] mortis invidia præreptum dolent; neque tamen magnitudinum plusquàm infinitarum existentiam negabat ullus ipsorum, sed varios infiniti gradus exprimendos potius arbitrabatur Stancharius per rationem* aa *ad* o, *aut* a^3 *ad* o, *vel* a^4 *ad* o *&c. (seu per duplicatam, triplicatam, quadruplicatam &c. rationis simpliciter infinitæ* a *ad* o) *quàm per rationem positivi ad negativum,* a *ad* $-$ 1, *vel* a *ad* $-$ 2; *neque enim signum negativum reddere quantitates nihilo minores, ut multis ratiociniis confirmabat, sed ad partem oppositam duntaxat retrocedentes: quare & expressionem negativam hyperbolarum plusquam infinitarum, verificari satis, accipiendo ipsarum aream ad plagam oppositam, ubi valor ipsarum finitus est. Extant adhuc apud me doctissimi Juvenis epistolæ, quas post meum in Ethruriam reditum,* 13 *Junii,* 10, *&* 24 *Julii dicti anni* 1704, *his de rebus transmisit, ut sententiam suam clariùs exponeret. Sed, hac doctrina admissa, non ideò concesserim Varignonio, aut* Plusquam infinitum *contradictionem involvere, cùm aliunde, quàm per quantitatum nihilo minorum expressionem probari possit, aut in assertione hyperbolarum plusquam infinitarum hallucinatum propterea fuisse VVallisium, quòd non animadverterit,*

terit, negativas quantitates, aream contraria positione accipiendam significare: nam in Algebra sua cap. 66, & 67 *expressè hanc doctrinam ipsemet VVallisius firmaverat, & disertis verbis* Volum. 2. Op. Math. pag. 286. *dixerat:* Impossibile est, quantitatem ullam negativam esse, impossibile est enim, ut ulla magnitudo sit minus quàm nihil, aut ullus numerus paucior quàm o. Nec tamen est ea suppositio aut inutilis, aut absurda, modò rectè intelligatur. Quamvis enim quoad puram notationem algebricam, innuere videatur nota $-$ magnitudinem, quæ minor sit, quàm nihil; cùm tamen physicam subit considerationem, magnitudinem non minùs realem denotat, quàm ipsum †; Sed sensu suppositioni contrario interpretandam. Verbi gratia siquis promoveri supponatur 5 passibus; atque tum retrocedere passibus 2; atque tum interroget quispiam, quantò promotior sit factus? Dicetur 3 passibus promotior, propter $5 - 2 = 3$; si autem, postquam processerat 5 passibus, retrocedat passibus 8; atque tum interroget quis, quantò sit promotior? respondebitur $-$ 3 passibus [propter $5 - 8 = -3$) hoc est tribus passibus minùs promotus &c. *Quod & aliis exemplis geometricis deinceps ostendit; itaque non inficiatur VVallisius, negativas quantitates oppositum situm respicere, quoties datam habent positionem, ut qualibet physica, & geometricæ magnitudines habent: at si de numeris purè abstractis sermo sit, qui à situ non pendent, quomodo eos Algebra versat: hoc modo, inquam, cur minores nihilo dici non debeant numeri negativi, cùm resultent ex majorum subtractione à minoribus? Si* 4 *ex* 7 *subtraho, video relinqui* †3; *si* 4 *ex* 4 *aufero, relinqui* o, *seu merum nihil; si* 4 *ex* 1 *auferam, an non minus quàm nihil supererit? an contendam superesse idem, quod superest ablatis* 4 *ex* 7? *hoc certè dicendum foret, si* $-$ 3, *quod est residuum subtractionis* 4 *ex* 1, *positivè accipi deberet pro tribus unitatibus majoribus nihilo, sed inversum situm [quem vero situm in his abstractis à materia, & à loco mihi fingam?] servantibus. Quidquid id est, inductum sal-*

ſaltem à VVallisio, & à præſtantiſſimis Geometris admiſſum, altiorem Infinitatis Ordinem, hac una Varignonii exceptione [tametſi undecunque ſolida] non infringi, manifeſtum eſt, quippe argumentis tali exceptioni minimè obnoxiis, & ab ejuſmodi tricarum, circa negativæ quantitatis naturam ſuccreſcentium, controverſia non pendentibus, ejuſmodi cauſā hactenus multipliciter propugnatam, & abundè confirmatam hic dedimus. Tanta enimverò ſemper apud me fuit Cl. Varignonii auctoritas, ut neque uni dumtaxat ratiunculæ fidens ab ejus ſententia diſceſſerim, nec niſi poſtquam, in omnem partem hoc argumento verſato, ſibimet ubique conſtans altioris Infinitatis teſtimonium inde multipliciter exprimere potui, VVallisiana doctrina manus dederim, nec prætermiſerim à primis uſque initiis ſuis magni hujus myſterii rationem ex ordine deducere; & cùm Vir. Cl. cui per æſtivas ferias hunc Tractatum legendum obtuleram, anceps adhuc animi (quòd nonnulla, quæ ex noſtro Hugenianorum Theorematum tractatu, abs ſe non ante perlecto, pendebant, ſibi obſcuriora viſa fuiſſent) ſententiam ſuſpenderet; prolixa Epiſtola, in qua expreſſam Lemmatum omnium huc pertinentium demonſtrationem, aliunde quàm ab elementis planis, & conicis non pendentem, propoſui, & controverſa hyperbolica ſpatia Pluſquam infinita *verè cenſenda eſſe inde rurſus concluſi, illam denique ad aſſenſum mirabilis hujus veritatis adegi, atque omnem deinde ipſi ſcrupulum, unam vel alteram difficultatem mihi objectam expediens, penitus ademi. Itaque hanc ipſam Epiſtolam, Lectorum meorum uſui pariter profuturam, hic adnectere placuit, opportunam huic Tractatui coronidem hac Appendice impoſiturus.*

EPI-

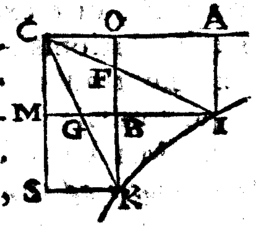
EPISTOLA GEOMETRICA

Ad Illuſtriſſimum Equitem

D. ASCANIUM LIPPI

ARETINUM.

REditum tibi in Patriam proſperum gratulor, Vir Illuſtriſſime, teque acriori, quàm antea, ſtudio Geometricarum, ac Mechanicarum rerum contemplationi animum impendere decreviſſe, lætus accepi. Interim verò obſcuriorem tibi accidiſſe non paucis in locis Tractatum noſtrum, *De Infinitis Infinitorum, atque Infinitèparvorum Ordinibus*, quem ſuperioribus æſtivis feriis tibi legendum obtuli, mirari deſino, poſtquàm retuliſti, Hugeniana noſtra, ex quibus multæ harum demonſtrationum pendent, à te minimè hactenus fuiſſe perlecta; Ne tamen animo deſpondeas, ad hujus enim admirabilis Veritatis lucem, quam tantoperè tibi manifeſtari deſideras, me facem preferente, ſtatim admitti poteris, ubi nonnullis Lemmatibus id omne ſupplevero, quod noſtræ demonſtrationis progreſſus aliunde perſpectum ſupponit; ſit ergo.



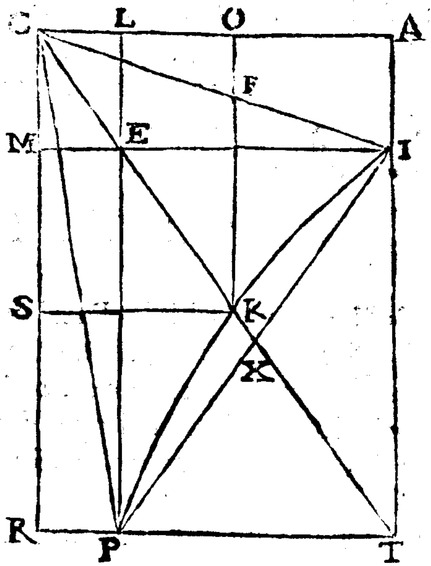
LEMMA I. *Ex punctis quibuslibet I, K Hyperbolæ Apollonianæ KI, ductis alteri aſymptoto parallelis IA, KO, junctiſque ad centrum C rectis IC, KI, erit ſector hyperbolicus KCI æqualis quadrilineo OAIK.*

Nam parallelogrammorum CAIM, COKS (*ex* 12. 2. *conic.*) æqualium,

dimi-

dimidia sunt triangula CAI, COK, quæ ideò æqualia sunt, & communi ablato triangulo COF, appositoque utrinque trilineo FIK, manifestum est, sectorem KCI æquari quadrilineo OAIK.

COROLL. Hinc patet quadrilinea KIAO, KIMS eidem sectori CIK, adeoque & invicem esse æqualia.



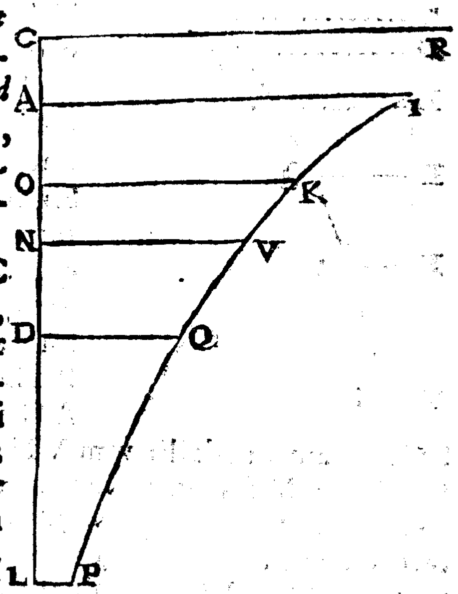
LEMMA II. *Sint in asymptoto CA tres rectæ proportionales CL, CO, CA, & ad hyperbolam ordinentur alteri asymptoto parallelæ LP, OK, AI: Erit punctum K vertex portionis PKI.*

Completis parallelogrammis, ut in figura; erit ex natura hyperbolæ, CL ad CO, ut reciprocè OK ad LP, quare etiam ipsa CO ad CA, ut OK ad AT: & ideò parallelogrammum COKS erit simile ipsi CATR, & circa eandem diametrum CT (*26. 6. elem.*) consistet; similiter cùm sit OK ad AI, vel ipsi parallelam LE, ut AC ad CO, vel CO ad CL, erit & parallelogrammum CLEM circa eandem diametrum ipsorum COKS, CATR; & quia ET, PI sunt diametri parallelogrammi EITP, se mutuò secabunt in X; Igitur recta CX, quæ ex centro bisecat applicatam PI, diameter erit portionis, & per ejus verticem transibit; ostensa est autem transire per punctum K, ergo K est vertex dictæ portionis.

LEMMA III. *Iisdem positis, quadrilinea AIKO, OKPL, quæ ordinatis ad terminos continuè proportionalium intercipiuntur, æqualia erunt.*

Nam

Nam & triangulum XCI æquatur XCP, & portio XKI æqualis est portioni XKP, cùm diameter KX bisecet applicatam PI, & portionem PKI: quarè sectores KCI, KCP, adeoque & quadrilinea AIKO, OKPL, *ex lemm. 1.* æquabuntur.



LEMMA IV. *Si fuerint LC, CD, & OC, CA proportionales, ordinatis inde ad hyperbolam LP, DQ, & OK, AI, intercepta quadrilinea LPQD, OKIA pariter æqualia erunt.*

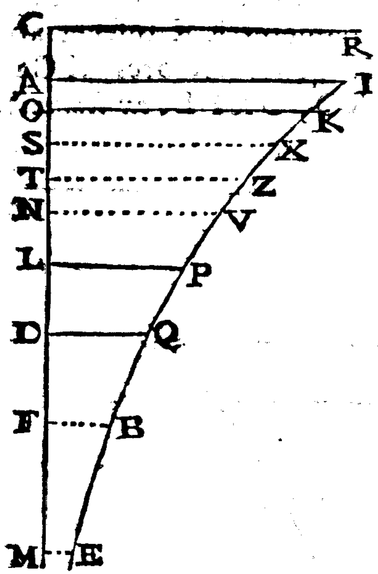
Sumpta inter DC, OC media proportionali NC, hæc media erit etiam inter LC, AC propter rectangulum LCA æquale ipsi DCO, seu quadrato CN; ergo ordinata NV, erit *ex lemm. præced.* quadrilineum ANVI æquale quadrilineo NLPV; itemq. ONVK æquale NDQV; quare & residua AOKI, DLPQ æqualia manebunt.

LEMMA V. *At si major, aut minor foret ratio LC ad CD, quàm OC ad CA, esset quadrilineum LPQD majus pariter, aut minus, ipso OKIA.*

Quippe aucta CL, augeretur primi quadrilinei extensio, & illa decrescente hæc pariter minueretur.

LEMMA VI. *Ordinentur ad hyperbolam duæ qualibet AI, OK, & duæ alia LP, DQ, erit ratio duarum OC, CA ad rationem duarum DC, CL, ut quadrilineum IAOK ad PLDQ.*

Multiplicetur enim utcunque ratio duarum OC, CA, sum-

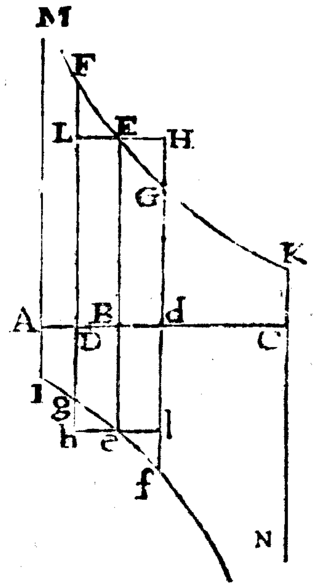


sumptis quotlibet continuè proportionalibus SC, TC, NC, quibus respondebunt, *per lemma 3.* æqualia quadrilinea prioribus ordinatis, aliisque SX, TZ, NV interiecta: adeò ut quàm multiplicata fuerit ratio NC, AC rationis OC, AC, tam multiplex resultet quadrilineum NVIA quadrilinei IAOK. Similiter multiplicata utcunque ratione DC, LC per quotlibet continuè proportionales FC, MC, ostendetur æquè multiplex fore quadrilineum PLME ipsius PLDQ: & quidem si ratio NC, AC æqualis fuerit rationi MC, LC, etiam quadrilineum VNAI *per lemma 4.* fiet æquale ipsi PLME; sin prima ratio major, aut minor fuerit secunda, etiam *per lemma 5.* primum quadrilineum fiet altero majus, aut minus; quare ut ratio OC, AC, ad rationem DC, LC, ita quadrilineum IAOK ad ipsum PLDQ, ob antecedentium æquè multiplicia præfato modo respondentia æquè multiplicibus consequentium, ut exigit terminorum proportionalitas *ex def. 6. 5. elem.*

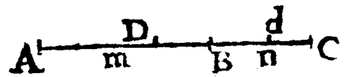
LEMMA VII. *Si recta AC* (ut in fig. sequenti) *secta utcunque in B, iterum secetur in D, inter A & B, aut in* d, *inter B, & C, erit ratio duarum BA, DA ad rationem duarum DC, BC in majore proportione, quàm BC ad AB: at ratio duarum* d*A, BA ad rationem duarum BC,* d*C in minori proportione erit, quàm BC ad AB.*

Per terminos A, C ductis parallelis KCN, IAM, & facta CK æquali AI, ex *K*, & I ducantur duæ hyperbolæ æquales KGEF, I*gef*, inverso situ positæ in angulis asym-

asymptoticis CAM, ACN, ad quas ordinata per punctum B recta EB*e*, reliquis asymptotis parallela, & per puncta D, *d* pariter ordinatis FD*g*, G*df*, per puncta E, *e* ducantur ipsi AC parallelæ LEH, *leb*; eritque *per lemma 6.* ratio duarum BA, DA, ad rationem ipsarum DC, BC ut spatium FEBD ad DB*eg*, hoc est in minori ratione, quàm [diminuto antecedente, & aucto consequente] quæ sit parallelogrammorum EBDL, *e*BD*b*, sive quàm EB ad B*e*, aut BC ad AB (nam æqualia sunt parallelogramma æqualibus hyperbolis inscripta EBA, *e*BC, adeoque latera habent reciproca) At è contrario ratio duarum *d*A, BA ad rationem ipsarum BC, *d*C est *ex eodem lemm. 6.* ut EG*d*B ad B*dfe*, quæ ratio minor est, quàm (aucto antecedente, & minuto consequente) parallelogrammorum EH*d*B, B*dle*, seu quàm EB ad B*e*, scilicet BC ad AB; & igitur major est in primo, & minor in secundo casu proportio dictarum rationũ, quàm sit ratio partium BC, AB, ut fuit propositum.

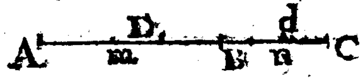


LEMMA VIII. *Esto AB ad BC in ratione qualibet*, m *ad* n. *Dico, factum ex potestate ipsius AB, cujus index* m, *in potestatem ipsius BC, cujus index* n, *esse omnium similium maximum, idest majus, quàm si, alibi secta AC in D vel* d, *sumeretur factum ex similibus earum partium potestatibus per eosdem indices denominatis.*



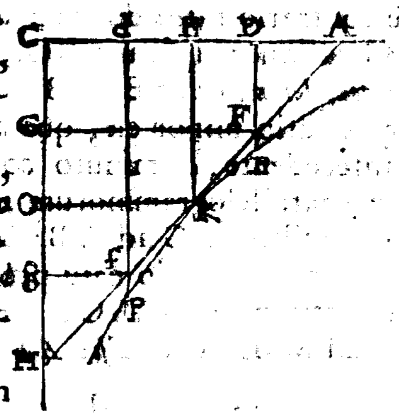
Nam quia ratio duarum AB, AD ad rationem duarum DC, BC est in minori proportione, *per lemma 7.* quàm BC ad AB, idest quàm *m* ad *n* per hypothesim, erit factum

L factum



ctum extremorum majus facto mediorum idest ratio duarum AB, AD multiplicata per m [seu ratio $\overline{AB}^m$ ad ipsum $\overline{AD}^m$] major erit ratione DC, CB multiplicata per n [hoc est ratione $\overline{DC}^n$ ad $\overline{CB}^n$] unde rursus factum extremorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{CB}^n$ majus erit facto mediorum $\overline{AD}^m$ in $\overline{DC}^n$. Similiter ostendetur, quòd cùm sit rationis duarum dA, AB, ad rationem ipsarum BC, dC, minor proportio, quàm BC ad AB, seu quàm n ad m, erit prima ratio multiplicata per m (hoc est $\overline{dA}^m$ ad $\overline{AB}^m$) minor secunda multiplicata per n (idest $\overline{BC}^n$ ad $\overline{dC}^n$) & ideò factum extremorum $\overline{dA}^m$ in $\overline{dC}^n$ minus erit facto mediorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$; quare ipsum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$ est omnium similium maximum.

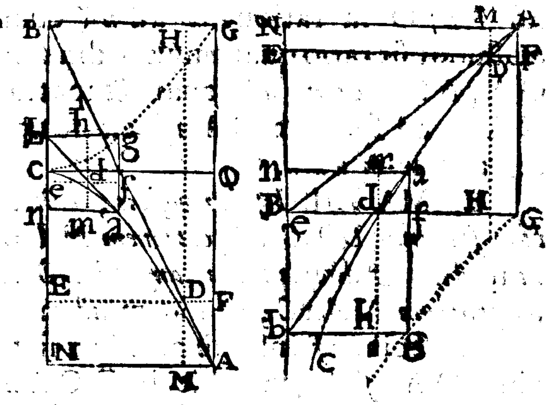
LEMMA IX. *Inter asymptotos ACH sit qualibet ex infinitis hyperbolis PKp, cujus ea proprietas, ut potestas ordinatæ KB denominata ab* m, *ad similem alterius ordinatæ PD potestatem, sit reciprocè ut quævis potestas abscissæ à centro DC, cujus index* n, *ad similem abscissæ BC potestatem. Dico, quòd si fiat AB ad BC, ut* m *ad* n, *juncta AK hyperbolam tanget in K.*



Occurrat AK ordinatæ PD in F; eritque factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ ad factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, ut $\overline{BK}^m$ ad $\overline{BA}^m$, sive ut $\overline{DF}^m$ ad $\overline{DA}^m$, vel ut productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$ ad productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$; atqui $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, *ex lemm. præcedenti*, cujus hypothesi casus hic congruit, majus est quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$, ergo (*per* 14. 5. *elem.*) etiam $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ (vel $\overline{CD}^n$ in $\overline{DP}^m$, ipsi æquale, ob reciprocam potestatum rationem) majus est quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$; major est igitur DP, quam DF, & ideò pun-

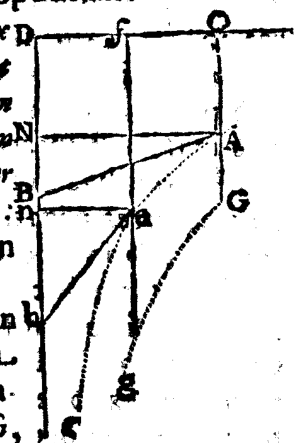
punctum hyperbolæ P est ultra rectam KA, idque ubique contingit, ergo AK in solo puncto K hyperbolæ occurrit, ipsamque tangendo prætergreditur.

LEMMA X. *In qualibet figura CAN, si ad terminos A, a ordinatarum AN*, an, *ordinentur rectæ AG*, a g *axi BN parallelæ, æquales verò respectivis subtangentibus NB*,nb, *erit figura GgaA æqualis figuræ AanN, cui correspondet.*

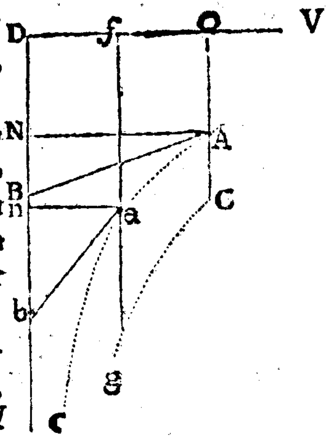


Has figuras *cap.* 8. *Hugeniaror. n.* 2 Correlatas appellabam, earumque æqualitatem (suppositis infinitè proximis GAN, HDE) demonstravi *ex* 43. 1. *elem.* propter æqualia Elementaria parallelogramma DFGH, DENM, itemque *dfgh*, *denm*, quæ sunt complementa parallelogrammorum circa diametrum AB, sive *ab*. Quare constat propositum.

LEMMA XI. *Esto AaC qualibet ex infinitis hyperbolis supra descriptis, & sint potestates ordinatarum AN*, a n, *quarum index* m, *reciproca potestatibus abscissarum* n*D*, *ND*, *quarum index* n, *& ducantur AO*, a f *ordinatæ ad aliam asymptoton: erit ut* m *ad* n, *ita quadrilineum NAan ad quadrilineum OAaf.*



Extensis enim OA, *f a* ad G, & *g* in ratione *n* ad *m*, fiat alia hyperbola ejusdem generis G*g*, quæ erit correlata priori, *ut in lemm.* 10. eo quòd AG, *ag* æquentur subtangentibus NB, *nb*, ad quas abscissæ ND, *n*D *n*D [æquales ipsis OA, *fa*] pariter sunt *ex lemm.* 9. in ratione *n* ad *m*; quare spatium A*ag*G æquatur *ex lemm.* 10. spatio A*an*N; est autem A*ag*G ad A*af*O in ratione *m* ad *n* (cùm ejusmodi sit ratio quarumvis ordinatarū GA, AO, & *ga*, *af*) quare & spatium NA*an* ad spatium OA*af* est semper in ratione *m* ad *n*.



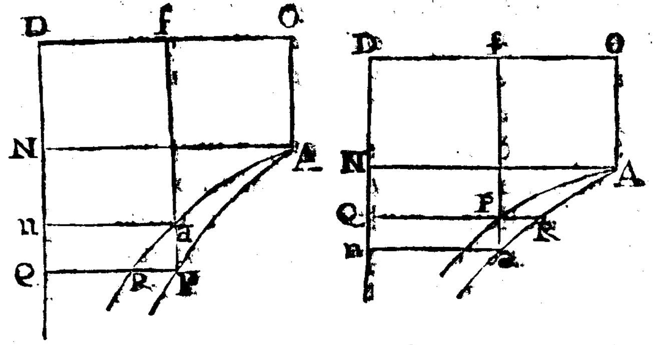
LEMMA XII. *Iisdem positis, erit totum spatium* DOaC *ad portionem* NAaC, *ut* n *ad* m; *& dividendo rectangulū* DOAN *ad spatium* NAaC, *ut* n — m *ad* m.

Ubi enim *af* infinitè proxima fiet asymptoto DN, spatium OA*af* degenerabit in DOA*a*C, & spatium NA*an* in NA*a*C, quarè cùm ejusmodi spatia OA*af*, NA*an* sint ut *n* ad *m*, patet integra quoque DOA*a*C, NA*a*C esse in eadem ratione, & dividendo inscriptum rectangulum ad subsequentem aream fore, ut *n* — *m* ad *m*;

Nimirum si *n* sit major ipso *m*, in ratione assignabili, quam habet ipsorum differentia ad datum *m* (ut propterea in hoc casu sit utriusque areæ finita ratio); si *n* æquatur *m*, ut in hyperbola Apolloniana, ratio prodibit infinitè parva o ad 1. [unde in hoc casu area hyperbolica infinitè major est inscripto parallelogrammo] sin fuerit *n* minor ipso *m*, habebitur ratio minor quàm infinitè parva, quæ scilicet foret negativi numeri minoris nihilo (appello *minorem nihilo* in hoc casu negativum numerum, quia non applicantur nunc numeri ad certas quantitates, aliquam datam positionem servantes, ut ad oppositam plagam inverti possint, sed absolutè considerantur, & in abstracto, tamquam exponentes, qui rationes quantitatum repræsentant, independenter à quolibet ipsarum situ) ad unitatem, vel alium numerum positivum (unde tunc aream hyperbolicam plusquam infinities superare inscriptum parallelogrammum Cl. VVallisius contendit) putà si *n* existente 1 fuerit *m* æqualis 2, fiet parallelogrammi ratio ad aream hyperbolicam quæ — 1 ad 2: si fuerit *m* æqualis 3, fiet illa ratio — 2 ad 3, atque ita deinceps; quas quidem rationes, patet non esse subduplam, aut subsequialteram, intercedentem inter aliquem ex terminis, qui comparantur, inverso situ acceptum (ut prætendit Varignonius) & reliquum eodem loco manentem, licèt hoc ipsum verificari contingat, quia nempe area NA*a*C ad reliquam DNAV, quæ, trans ordinatam, ad partes oppositas vergit, semper invenitur esse, ut *m* — *n* ad *n* — *m* [ut facilè deducitur ex præmissis, & utramlibet ad inscriptum parallelogrammum, velut ad *m*, comparando] itaque alterutra est ut differentia exponentium negativa, vel positiva, nempe si *m* superet *n* numero *b*, erit prima ad secundam ut *b* ad — *b*, sin major fuerit *n*, quàm *m* eadem differentia, erit illa ad hanc ut — *b* ad *b*, cùm simili lege utraque area ad utramque asymptoton referatur, mutatis dumtaxat ordinatarum potestatibus in potestates abscissarum, & contra; Sed quemadmodùm in casu Apollonianæ Hyperbolæ, cujus ratio ad inscriptum parallelogrammum est *n* ad *n* — *n*, sive 1 ad o, non contendit Varignonius, consequens rationis o indicare in antecedenti *nullam magnitudinem* (quasi in ipsam ordinatam AN, unde originem ducit, contraheretur area hyperbolica) sed *absolutè infinitam*, licèt interim in rebus physicis, aut geometricis quantitatibus, datam positionem, ex determinata origine, servantibus, quoties contingit, quantitates illas, puta *a*, & *b*, invicem æquari, tunc *a* — *b* æquetur o, & in nihilum abeat, sive retrocedens exactè quantitas *b* ad præcitatam originem ipsius *a* nec citra consistens, nec ultra procurrens, in ejusdem *a* principium contrahatur, ibique, in non quantum sui generis degenerans, evanescat: ita in casu altiorum hyperbolarum, ubi ratio paral-

parallelogrammi ad aream hyperbolicam subsequentem est $n-m$ ad m, sive -1 ad 2, aut -2 ad 3 &c. non videtur præsumendum, ex negativo antecedente, indicari consequentis areæ transpositionem faciendam ad aliam partem ordinatæ, ut passim in magnitudinibus situm habentibus, si ex fixa origine in determinatam plagam protenduntur a, & b, sitque illa minor, hæc major differentia c, itaut $b = a + c$, tunc $a - b = a - a - c = -c$, & hæc est positivæ quantitas retrorsum ab origine computata, in adversam partem ab illa, versùs quam se extendere a, & b supponebantur; sed potiùs hinc concludere licet, dictum parallelogrammum ad consequentem aream, ut minus quàm nihil, comparari, adeo ut hæc illud superet plusquàm infinitè: quin potius, si negativa expressio quidpiam invertendum concluderet, ipsum parallelogrammum, quod est homologus comparationis terminus quantitatis negativæ -1, aut -2, situm mutare deberet, non area hyperbolica, quæ homologa est positivo termino m exprimenti 2, aut 3 positivas unitates; quemadmodum in expressione Apollonianæ hyperbolæ, ad quam dictum parallelogrammum est, ut o ad 1, idem parallelogrammum, velut nihilum reputatur respectu areæ infinitæ hyperbolicæ, non è contrario area hyperbolica in nihilum degenerat; sed hæc obiter dicta sint in Wallisiani argumenti defensionem, cujus causa tamen ab hoc puncto non pendet, cùm nec mihi propositum sit ab ejusmodi analytica expressione variorum infinitatis graduum evidentiam repetere (qui sanè hinc non satis commodè eliceretur, alteram aream hyperbolicam alteri superioris ordinis comparando, & in hoc tantùm Wallisii ratio deficere videtur) sed potius geometrica ostensione, ut videbimus, quæ hanc negativi signi ambiguitatem nihil moratur.

LEMMA XIII. *Per idem punctum A transeant duæ hyperbolæ, Apolloniana AaR, & quædam alia AP, cujus ordinatarum PQ pote-*



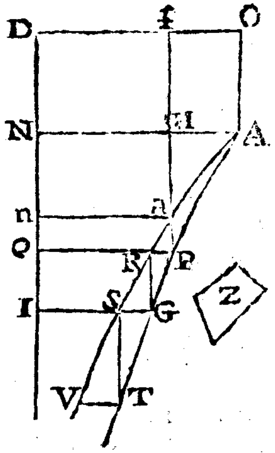
potestas m reciprocè respondeat abscissis DQ, & ex quolibet ejus puncto P ad asymptotos parallelæ agatur PQ, Pf, occurrentes priori hyperbolæ in R, a: erit trilineum RAP ad trilineum AaP, ut m ad 1.

Cùm in hyperbola Apolloniana quadrilinea AanN, AafO sint æqualia [*per coroll. lemm.* 1. *sive ex lemm.* 11. ob indices m, n æquales, quibus dicta spatia proportionantur] apposito, aut dempto communi trilineo PaA, fiet spatium NAPan æquale PfOA; sed PANQ ad PfOA, *per lemm.* 11. est, ut m ad n, sive, in hoc casu, ut m ad 1; ergo idem PANQ etiam ad NAPan erit, ut m ad 1: sed etiam QRAN ad NAan est ut ratio duarum nD, DN, *per lemma* 6. scilicet pariter ut m ad 1 (quia prima ratio semel accepta æquatur secundæ per m multiplicatæ, cùm ex hypothesi sit QD ad DN, ut $\overline{Na}^m$ ad $\overline{QR}^m$ vel $\overline{na}^m$, idest ut $\overline{nD}^m$ ad $\overline{DN}^m$) ergo & reliquum RAP ad reliquum AaP est in eadem ratione m ad 1. Quod erat &c.

COROLL. Hinc constat, dividendo in prima figura, esse RPa ad AaP, ut $m-1$ ad 1: at in secunda figura, esse RPa ad AaP, ut $1-m$ ad 1; & RaP ad RPA in prima figura esse, ut $m-1$ ad m: at in secunda figura esse, ut $1-m$ ad m, unde si in primo casu m æquatur 2, vel in secundo m æquatur dimidio unitatis [hoc est sit exponens radicis quadratæ] patet, rectam Pa primæ figuræ, bifariam dividere trilineum ARP, & rectam RP secundæ figuræ, similiter bifariam secare trilineum AaP.

LEM-

LEMMA XIV. *Iisdem positis, ex bilineo R A P utrique hyperbola interiecto, magnitudinem data qualibet finita quantitate Z majorem secabimus.*

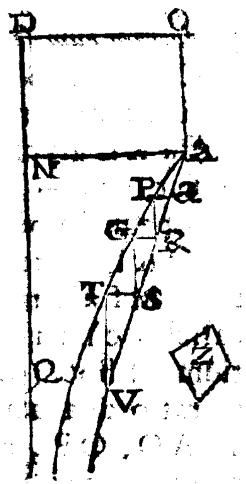


Sit primò numerus *m* major unitate, & tunc ducta quavis P*a* asymptoto DQ parallela, multiplicetur ratio *m* ad 1, usquedum æqualis, aut proximè major evadat ratione Z ad A P a; sitque ratio sic multiplicata eadem, quę producti ex numero *r* in *m*, idest *r m* ad 1. Tum ducta PR asymptoto DO parallela, agatur RG parallela DQ, deinde SG, ST, TV alternatim asymptotis parallelę, idque in tot punctis P, G, T continuetur, quoties multiplicata fuerit ratio *r m* ad 1 rationis *m* ad 1. Quia igitur spatium AVT ad spatium AP*a* rationem habet compositam ex intermediis rationibus, AVT ad ATS, ATS ad ASG, ASG ad AGR, AGR ad ARP, & ARP ad AP*a* (omnibus majoris inæqualitatis) quarum prima, tertia, & quinta (aliæque impari loco positæ si plures fuerint) æquantur semper *ex lemm.* 13. rationi *m* ad 1. quæ simul compositæ eandem rationem multiplicant juxta acceptum numerum punctorum P, G, T, adeoque ex se solis conflarent rationem *r m* ad 1. idest æqualem, aut proximè majorem ratione Z ad AP*a*, patet utique, rationem AVT ad AP*a*, quæ ex recensitis, & insuper ex secunda, quarta, aliisque pari loco positis componitur, longè majorem esse ratione *Z* ad AP*a*, ideoque spatium AVT multò majus fore proposito spatio Z.

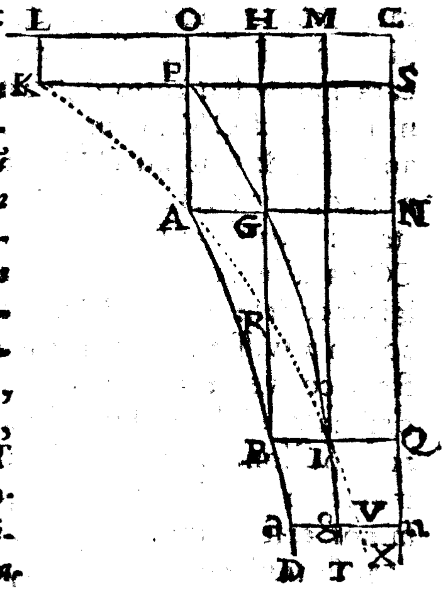
Sin autem fuerit *m* [*ut in figura sequenti*] minor quàm 1, tunc ipsa P*a* ducatur parallela DO, & ratione 1 ad *m* vicissim multiplicata, usque dum fiat ratio *r* ad *m* æqualis, aut proximè major ratione Z ad AP*a*, continuetur

in

in totidem punctis flexilineū *a*PRGSTV ex lineis alternatim parallelis ad asymptotos, & eodem ratiocinio colligetur, spatium ATV ad AP*a* majorem rationem habere, quàm Z ad AP*a*, quia solæ rationes ATV ad ATS, nec non AGS ad AGR, & APR ad AP*a* [singulæ *ex lemm.* 13. æquales rationi 1 ad *m*] componerent rationem *r* ad *m*, multiplicatam scilicet ipsius 1 ad *m*, pro numero punctorum P, G, T; Quare constat, in hoc etiam casu, ex bilineo RAP secari posse spatium TAV majus qualibet finita magnitudine proposita Z. Quod erat &c.



COROLL. Hinc patet, spatium hyperbola Apolloniana ARV, & quavis alia APT interceptum, esse magnitudinis absolutè infinitæ, potest enim ad finitum spatii AP*a* rationem habere majorem qualibet assignabili.

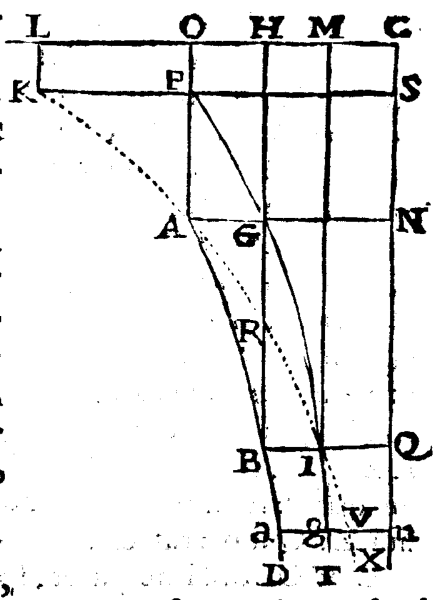


LEMMA XV. *Sit hyperbola Apolloniana AIV, & alia quælibet ABaD, cujus ordinatarū AN, an potestates, per numerum m (unitate majorem) denominatæ, reciprocè respondeant abscissis nC, NC: tum per sectionem quarumvis asymptoto parallelarum AO, BH, in punctis P, G, in qualibet assignabili ratione, putà f ad 1, fiat hyperbola PGT ipsi ABaD proportionaliter analoga. Dico, PGT convenire alicubi, velut in I, cum Apolloniana hy-*

M

na hy-

na hyperbola AIV, & alterius productam eam secare.



Ordinata PS occurrat Apollonianæ hyperbolæ in K, & ducta KL asymptoto parallela, fiat, ut $m - 1$ ad 1, ita quadrilineum hyperbolicũ OLKA ad OAIM, resectum pariter recta MI asymptoto CQ parallela; cùm igitur illud spatium ad hoc (*lemm. 6.*) sit, ut ratio duarum LC, CO, sive AO, OP, nempe f ad 1, ad rationem duarum OC, CM, erit, ut $m - 1$ ad 1, ita ratio f ad 1 ad rationem OC ad CM, & componendo, ut m ad 1, ita composita ratio ex f ad 1, & OC ad CM (nempe ratio fOC ad CM) ad ipsam rationem OC ad CM; unde productum extremorum æquabitur producto mediorum, idest posterior ratio multiplicata per m seu ratio $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$ æquabitur simplici rationi fCO ad CM, compositæ scilicet ex f ad 1, sive AO ad OP, & CO ad CM, aut IM ad AO, quæ duæ rationes conflant rationem IM ad OP: sed ut $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$, ita ex natura curvæ PGT est etiam MI, quę ex M asymptoto CQ parallela usque ad curvam PGT ducitur, ad eandem OP; igitur eadem est IM ad Apollonianam, & MI ad hanc hyperbolam novissimè ductam; quare utraque hæc curva in puncto I conveniet; deinceps autem, $\overline{QI}^m$ ad $\overline{gn}^m$ [posita ng ordinata ad hanc hyperbolam PIT, nV verò ordinata ad Apollonianam ARV] seu nC ad CQ, vel QI ad nV, majorem habebit rationem, quàm QI ad gn, & ideò nV minor erit quàm ng, quare manifestum est, utramque curvam se invicem secare in I, & curvam PGI ex interiori

fieri

fieri exteriorem Apollonianæ hyperbolæ. Quod &c.

His positis, atque attentiùs perspectis, facillimè demonstrabitur precipuum nostrum.

THEOREMA.

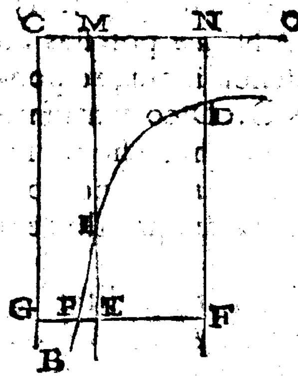
Cujuslibet hyperbolæ Apollonianæ altioris, spatium asymptoticum est Plusquam : Infinitum *censendum.*

Intelligatur ARIVX hyperbola Apollonii, & per idem punctum intra easdem asymptotos QCO descripta sit hyperbola quælibet, cujus ordinatarum AN, an potestas ab exponente m, qui major sit unitate, denominata, respondeat abscissis reciprocè acceptis nC, NC. Dico spatium nCOABD, ad partes D infinitè productum, esse infinities majus spatio absolutè infinito Apollonianæ hyperbolæ nCOARV æquè in infinitum producto: adeoque illud esse *Plusquam Infinitum.*

Assignetur enim quælibet ratio majoris inæqualitatis, f ad 1; & singulis asymptoto CQ parallelis AO, BH &c. in tali ratione sectis ad puncta P, G &c. ducta sit hyperbola PGT, priori ABD proportionaliter analoga, quæ [*lemm.* 15.] secabit Apollonianam hyperbolam alicubi, velut in I; bilineum autem VIT (*per coroll. lemm.* 14.) erit absolutè infinitum, adeoque infinities majus terminato spatio PGIRA; & apposito communi spatio nCOPGIVX, fiet nCOPGIgT absolutè majus spatio nCOARIVX; & ideo spatium NCOBaD majorem habebit rationem ad hoc secundum, quàm ad illud primum: sed ad illud (ob proportionalem singularum parallelarum OA, HB sectionem ad P, G in ratione f ad 1) est in assignabili quavis ratione f ad 1; ergo ad hoc secundum rationem habet majorem qualibet assignabili; infinities igitur ipsum superat, adeoque est *Plusquam Infinitum*. Quod erat demonstrandum.

M 2 Nunc

Nunc ad scrupulos tuos excutiendos accedo. Illud imprimis opponis, quomodo fieri possit, ut omne asymptoticum spatium, velut CNDIB, infinities minus asseri possit circumscripto parallelogrammo CNF, ut ego sæpius asserui: cùm tamen, si intelligatur Vas prismaticum datæ altitudinis æqualis CN, basim habens ipsum asymptoticum spatium, aqua, vel alio fluido repleri, tum amota curva sponda DIB, permittatur aqua fluere usque ad spondam NF alteri CG parallelam, adeo ut adaptetur prismati,



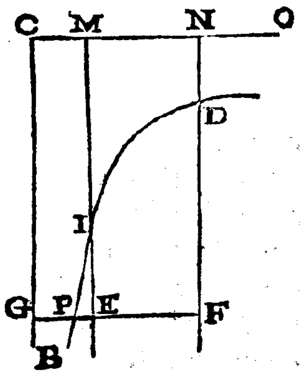
basim nunc habenti parallelogrammum infinitè longum CNF, consequens videatur, ut ad aliquam altitudinem, si non æqualem priori, saltem in aliqua ad ipsam ratione assignabili, eadem aqua assurgat, ne dicere cogamur, infinitam molem aquæ vix sufficere ad madefaciendam dumtaxat infinitè longi parallelogrammi superficiem, nec tantam esse, ut supra fundum vasis CNF vel tantillum elevetur, quod absurdum ab omnibus censendum fore arbitraris. Ad hæc, si in parallelepipedum, super determinato quadrato CN in longitudinem infinitam erectum, aquam illam, quæ prius intra prisma finitæ altitudinis CN, sed infinitam asymptoticam aream pro basi obtinens, concludebatur, immissam concipiamus, utique ad infinitam altitudinem fore elevandam observas, adeoque congruere posse prismati, basim habenti infinitum parallelogrammum, finitam verò altitudinem; & sic non esse censendum asymptoticum spatium infinities minus parallelogrammo circumscripto. Postremò auctoritatem nescio, an rationem Cl. V. Galilæi obiicere identidem non prætermittis, quippe qui *Dial. 1. de nova scientia* non posse invicem comparari infinitas magnitudines, exemplo radicum, quadratorum,

torum, ac cuborum ex omnibus numeris selectorum evincit, unde vocabula majoris, minoris, & æqualis locum non habere in Infinitis statuit, eoque minùs admissurum hæc nostra *Plusquam Infinita* arbitraris, qui ne rationem quidem assignabilem in ejusdem generis Infinitis agnoscit: unde sæpius repetis, cavendum, ne mirum in modum hallucinemur, dum tam audacter infinitas quantitates, finitæ nostræ mentis captum excedentes, versare non dubitamus, ac de iisdem, perinde ac de finitis, per analyticos calculos, geometricos discursus, ac figurarum diagrammata, discurrere præsumimus.

Quibus hæc breviter posse reponi observo. Primò nihil absurdi esse, quòd aqua illa, quæ vas prismaticum asymptotale CNDIB implebat, applicata Vasi parallelepipedo super parallelogrammo CNF erecto, vix ejus fundum madefaciat, nec ad ullam finitam altitudinem à sua basi elevetur, sed tantùm ad infinitè parvam, adeout quàm infinities minus est spatium asymptoticum CNDIB circumscripto parallelogrammo CNF, tam infinities minor sit reciprocè altitudo, ad quam in hoc parallelepipedo assurget aqua, altitudine CN prioris prismatis, ut generatim in omnibus solidis æqualibus contingere necesse est: ac demum illud idem in hoc casu dicendum esse, quod quis diceret, si ex finito aliquo, quantumvis magno, aquarum receptaculo, putà ex toto oceano, effundi intelligeretur aqua in immensam planitiem, seu superficiem infinitam, cui adhærendo, certè non posset in ullam datam altitudinem elevari, sed illam vix humectaret: eodem quippe modo finitum oceani fundum se habet ad immensam planitiem, ut infinita area asymptotica ad circumscriptum parallelogrammum, quod illa ostenditur infinities majus.

Secundò, si aqua illa replens prismaticum Vas asymptotale, infunderetur parallelepipedo basim habenti datum

tum quadratum rectę C N, ſed interminatam altitudinem, utique intra illud ad altitudinem infinitam erigeretur, ſed tamen infinities minorem, quàm ſit longitudo ſpatii aſymptotici: nimirum ſi area aſymptotica fuerit hyperbolæ Apollonianæ, erit altitudo priſmatis æqualis infinito axi Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ, ſubtangentem habentis æqualem ipſi N C lateri quadrati hyperbolico ſpatio inſcripti: nam ejuſmodi ſpatium aſymptoticum ſæpius oſtendimus æquari rectangulo ex dicta N C in axem præfatum Logiſticæ, ut quævis aſymptotici ſpatii terminata portio æquatur rectangulo ejuſdem N C in rectam axi Logiſticæ parallelam, ejuſque curvę, & aſymptoto hyperbolæ interpoſitam; Itaque cùm dicimus, ſpatia hujus generis aſymptotalia eſſe infinities minora rectangulo quovis infinitè longo, intelligendum eſt de longitudine æquè infinita, ac ſit longitudo dicti ſpatii: ſeu de rectangulo ipſi circumſcripto, & qualibet ejus parte proportionali, per ſubdiviſam illius latitudinem reſecta: non autem id aſſerimus de quovis infinito rectangulo indiſcriminatim. Vide Scholion I. ſubiectum *coroll.* 2. *prop. IX. pag.* 59. hujus tractatus.



Tertiò ad Galilæi ſive auctoritatem, ſive rationem, reſpondeo, me nullatenus dubitare, ſi viveret nunc temporis Vir Clariſſimus, & tot Illuſtrium Mathematicorum, qui hos diverſos infinitorum gradus mecum agnoſcunt, fundamenta perpenderet, inſignemque hujus doctrinæ uſum in geometricis, & phyſicis problematibus ſolvendis agnoſceret, aut eorum auctoritati & rationi ſuam liberè, & ſyncerè poſtpoſiturum, aut ſaltem fore, ut mirabilia hæc profundioris Geometriæ arcana, ſin minùs probaret, certè debita veneratione ſuſpiceret, eoque loco haberet, quo ſua

ſua Paradoxa de puncto æquali peripheriæ, aliiſque hujuſmodi, habenda eſſe à cæteris Mathematicis voluit. Cæterùm, re maturiùs, atque attentiùs penſata, fortaſſe Vir Lynceus animadverteret, ex omnibus poſſibilibus numeris, nedum plures, ſed infinities plures eſſe radices, quàm quadratos; & adhuc infinities plures quadratos eſſe, quàm cubos, & ſubinde ſemper infinities minorem eſſe multitudinem altiorum poteſtatum: quemadmodum & facilè colligeret, omnium prorſus numerorum multitudinem eſſe duplam multitudinis imparium dumtaxat, vel dumtaxat parium numerorum; itemque eandem omnium numerorum multitudinem triplam eſſe illorum multitudinis, quos ternarius numerare poteſt; &c. Ad rationem verò dubitandi, an non totidem cenſendi ſint quadrati, aut cubi, quot radices &c. cùm cuilibet radici ſuum reſpondeat quadratum, & ſuus cubus: itemque an non totidem ſint omnes prorſus numeri, quot ſoli pares, aut ſoli illi, qui à ternario numerantur, cùm cuivis prorſus numero ſuus duplus (qui par eſt) poſſit aſſignari, itemque ſingulis correſpondeat ſuus triplus [quem ideò ternarius metitur] &c. ipſummet reſponſurum arbitror, hæc omnia falſa eſſe, ſi ad æqualem terminorum numerum cujuſvis generis numerorum ſeries prorogari intelligatur: ut enim ab 1 ad 10, vel ad 100, vel ad 1000. &c. ſemper falſum eſt tot eſſe radices, quot quadrata, quot cubi, quot pares numeri, quot à ternario numerati, etenim quos Galilæus ait aſſignari poſſe ſingulis radicibus quadratos, cubos, itemque duplos, & triplos &c. extra ſeriem acceptam exiſtere certum eſt: ita etiam ſi in multitudine majori qualibet data, juxta ejuſdem infinitatis progreſſum, numeri infiniti accipiantur, falſum erit, totidem in ipſis radices, quot quadratos, & cubos, & per binarium, & per ternarium diviſibiles poſse aſſignari, qui enim ſic correſponderent (præter paucos in accepta ſerie contentos) ultra terminum aſumptarum radicum eum, extra progressionem, forent assumendi, quemadmodum ultra denarium excurrunt numeri quadrati, & cubi, & dupli, & tripli eorum qui ab 1 ad 10 computantur: & ultra centenarium sunt qui similiter respondent singulis numeris intra centenarium conclusis; atque ita deinceps. Itaque ratio non deest, cur crederemus, ipsummet Galilæum facilè admissurum, quòd infinita omnem æqualitatis, & inæqualitatis majoris, ac minoris, ipsamque altiorum graduum varietatem induere possint, neque ægrè laturum, ut inditam nobis à Deo Opt. Max. Infiniti ideam, quoad fieri potest, assiduè contemplemur, ejusdemque Auctoris nostri infinitam essendi plenitudinem, immensam, interminatam, incircumscriptam, Sapientiæ, Potentiæ, Bonitatisque magnitudinem, per hæc ænigmata, interim admirantes, dum paulatim ad despiciendas hasce finitas res & caducas animum erudientes, ad illud *Infinitorum, & Plusquam Infinitorum omnium Maximum*, sine extensione immensum, sine successione perpetuum, sine multitudine infinitum, omnis extensionis originem, omnis successionis fontem, omnis infinitatis principium, evidentiori intuitu, facie ad faciem, aliquando perscrutandum aspiramus. Hæc una jucundissima contemplatio, per interminabilis ævi seriem mentes nostras jugiter occupabit, hæc una beatos efficiet: cur itaque dubitabimus hæc infinitatis nostri Auctoris vestigia, in admirandis operibus suis relicta, has ejus magnitudinis velut umbras, & spectra, nobis in his tenebris occurrentia, quoad licuerit, persequi, siquam inde veritatis lucem eruentes, futuræ fœlicitatis specimen aliquod prægustare possimus?

Quod porrò ex rerum finitarum propietatibus, et undique circumscriptis figuris, de Infiniti natura, deque immensis spatiis pronunciare non vereamur, id extra reprehensionem esse intelliges, si ex ipsis creaturis, utique finitis, exiguis, et limitatis, ad ejusdem Creatoris nostri,

Maxi-

Maximi, Infinitique notitiam ascendere nos debere animadvertas, & ex earum dotibus, quàmlibet imperfectis, summi Opificis infinitas perfectiones colligere, dum *Invisibilia Dei, per ea quæ facta sunt, intellecta conspiciuntur*, ut monuit Apostolus. Ad hæc: tibi ipsi, ac vulgo philosophorum potius cavendum est, ne te præjudicio aliquo falli permittas, dum ab Infinito Finitum omne toto genere distingui putas, ut alterum cum altero conferri nequeat; magnitudinum quippe finitarum divisibilitas in infinitum, tot physicis, & geometricis argumentis demonstrata, & apud sapientes omnes jam inconcussa, arguit ipsasmet ad quoddam Infiniti genus pariter pertinere, tametsi, quia nobis ordinariè tractandæ occurrunt, ab Infinitis secerni, & peculiari nomine Finitorum designari consueverint. Quævis materiæ particula, si doctissimum Leibnitzium audias, infinita est, non potestate dumtaxat, sed actu ipso, ut Scholæ loquuntur: en ejus verba ex Epistola ad D. Foucher Canonicum Divionensem in Diario Parisiensi 3. Augusti 1693.

Je suis tellement pour l' infini actuel, qu' au lieu d' admettre que la nature l' abhorre, comme l' on dit vulgairement, je tiens qu' elle l' affecte par tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu' il n' y a aucune partie de la matiere, qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; & par consequent la moindre particelle doit estre considerée comme un monde plein d' une infinité de creatures differentes.

Quæ si vera, aut veris similia censeantur, quis vetet imposterum de finitis magnitudinibus, perinde ac de infinitis, & è contrario de infinitis, perinde ac de finitis, discurrere, cùm uno genere uterque magnitudinum ordo veluti comprehendatur? Præterquamquod ipse nostrarum demonstrationum progressus apertè ostendit, debitas cautiones à nobis minime prætermissas, prout rerum ferebat conditio, cùm ex rationibus finitarum quantitatum, ad ipsas infinitas vel invicem, vel cum infinities majoribus, aut

mino-

minoribus comparandas gradum faceremus.

Cæterùm quæ mihi obiecisti Trevoltiensium Sociorum, qui monumenta Scientiarum, ac bonarum Artium perscribunt, testimonia, nostræ causæ non admodum officere judico. Ajunt illi artic. 33. mensium Maii, & Junii anni 1701 in recensione Methodi Jacobi Bernoullii ad determinandos evolutarum radios ,, *Analysim infinitè parvorum [juxta phrasim D. Hospitalii] in ipsiusmet Infiniti viscera penetrare , nec Infinitum dumtaxat complecti, sed Infinitum infiniti, aut etiam infinitorum Infinitatem : at optandum esse, ut ejusmodi Analysis, quam contendunt fęcunditate admirabili pręditam, tantam evidentiam secum afferret , quantam à Geometria jure expectamus : Sed cùm audiuntur differentes de Infinito, deque Infinito infiniti, ac de Infinito infinities infiniti, atque ita deinceps sine limite progrediendo, cùmque finitis magnitudinibus hæ infinitorum Infinitates applicantur, non semper contingit, eos quos erudire, atque ad aßensum cogere conantur, tanta ingenii vi præditos esse, quanta requireretur, ut in adeo profundis abyßis recondita mysteria discernere queant* ,, & infra sub finem ,, *Qui antiquis Geometrarum ratiociniis assueti sunt, nonnisi agrè ab iis se avelli patientur, ut tam abstractas methodos prosequantur: ac facilè malint non adeò longè progredi, quàm novas vias ingredi ad Infinitum infinities infiniti ducentes, in quibus non adeò claram circa se lucem semper aspicient, ac satis obvio aberrandi periculo se frequenter obnoxios sentient. Non sufficit in rebus geometricis rectè concludere, nisi & legitimam esse illationem evidenter nobis innotescat.* ,,

In quibus patet, non improbari quidem ipsammet infinitè parvorum Analysim, nec doctrinam infinities infinitorum, velut erroris suspectam, traduci, sed unum hoc querelæ subiectum esse, quòd non satis clarè, & evidenter ab hujus methodi cultoribus hæc omnia tradantur, sed magni alicujus mysterii ad instar, intricatioris calculi velo involuta proponi consueverint; quod fortasse in nostro tractatu culpare non poterunt, in quo dilucidè, ut arbitror, atque ex severiori Geometrarum methodo demonstrata omnia deprehendent. In eam quippe sententiam & nos sponte concedimus, optandum esse, ut quæ per analyticum calculum inveniuntur, ad geometricam potius amussim exacta, si fieri potest, proponantur, quàm ut per symbola, multiplici præsertim exponentium gradu, & radicum implicatarum signis affęcta, implicentur, ex quibus non statim, uno velut intuitu, quemadmodum ex linearibus demonstrationibus, veritatem expositorum Theorematum Lector elicere potest, sed longum ejusdem calculi sibimet repetendi tędium subire cogitur, antequàm certam propositæ rei notitiam sibi comparet, non minori plerumque labore, quàm si ab initio eidem veritati ex integro per semetipsum indagandæ animum applicuisset.

Hæc habui, quæ difficultatibus tuis pro nunc reponerem: siquid exinde lucis haurire poteris, ea fruere; siquid verò obscurius, præ argumenti ipsius conditione, dictum invenies, id quam primùm, sincera, qua invicem utimur, libertate indicare ne prætermittas, congruam ex me dilucidationem, suo tempore, reportaturus.

Vive, vale; & siquid novisti rectius istis,
Candidus imperti: si non, his utere mecum.

Dabam Aretii Kalendis Septembris MDCCIX.

,, DOMINUS REGNABIT IN ÆTERNUM, ET ULTRA ,,
Exod. cap. 15. v. 18.

FINIS.

AP-

APPROBATIONES.

DE Mandato Reverendiss. Patris D. Alphonsi Cellini Abbatis Generalis totius Ordinis Camaldulensis, attente legi librum, qui inscribitur: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitè parvorum ordinibus &c.* à P. D. Guidone Grando Monacho Camaldulensi Celebri Mathematico, & Pisanæ Universitatis Publico Philosophiæ Professore compositum, nihilque in eo tam Catholicæ Fidei, quàm bonis moribus dissonum inveni; quinimmò Opus profundioris Geometriæ meditationibus, Infiniti ipsius Naturam, æquè ac differentialis Calculi Methodum illustrantibus, refertum, & tanto Auctore dignum, & Mathematicæ Studiosis perutile futurum censeo, si typis mandetur.

Dat. Aretii in Monasterio S. Mariæ in Gradibus die 15. Septembris 1709.

D. Antonius Franciscus Caramelli S. Theolog. Doctor, Abbas dicti Monasterii, & Visitator Camaldulensis.

CUm librum, cui titulus est: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitè parvorum ordinibus*, a P. D. Guidone Grando Monacho nostro compositum recognoverit Reverendissimus P. D. Antonius Franciscus Caramelli Abbas Visitator (cui hoc ipsum commissum fuit) & censuerit in lucem edi posse, Nos facultatem Auctori præfato elargimur, ut eundem librum typis mandare valeat, si ceteris, ad quos spectat, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscriptas, ac Sigillo Nostro munitas dedimus.

Ex Monasterio Nostro SS. Hyppoliti, et Laurentii Faventiæ die 1. Octobris 1709.

D. Alphonsus Abbas Generalis Camald.

Locus ✠ Sigilli.

D. Marinus Miserochi Cancell. Camald.

IMPRIMATUR.

Frater Carolus Antonius Panni de Cremona Ord. Min. Conv.
Vicarius Generalis Sanctæ Inquisitionis Pisarum.

Imprimatur Pisis.

Anton. Francisc. Palmerini V. Generalis.

NOBILISSIMO, ATQUE ERUDITISSIMO VIRO

HENRICO NEVVTON

POTENTISSIMÆ ANGLORUM REGINÆ,

Apud Regiam Celsitudinem COSMI III. *M. Ducis Etruriæ,*
nec non apud Serenissimam Genuensium Rempublicam,

ABLEGATO.

GUIDO GRANDUS FELICITATEM.

INcredibile sciendi desiderium, & inexplebilem, abstrusa quæque, magisque profunda rimandi, cupiditatem humanæ menti summus Naturæ Conditor indidit, ut ad Auctoris sui cognitionem, non solùm officii sui debito sollicitante, gratique etiam amoris stimulo urgente, sed ampliùs objecti ipsius sublimitate ineffabili invitante, quodammodò excitaretur. Huic genio præ omnibus indulgentes, imò fræna laxantes, acutissimi, ac præstantissimi Mathematici, assiduo, & operoso studio in id maximè incubuerunt, ut ordine perspicuo rationis suæ vim gradatim promoventes, ex primis, planissimis, ac cuilibet facilè obviis veritatibus, quarum notitiam ab ipso Deo Opt. Max. nostris animis insertam accepimus, ad alias magis arduas detegendas sibi viam munirent, eo successu, quem pauci licèt pro merito intelligant, plerique tamen in dies sentiunt, & omnes jure mirantur. Nam, ut cetera omittam admiranda Theoremata, quæ se ab ipsis Geometriæ nascentis exordiis prodiderunt, velut de æqualibus triangulis, & parallelogrammis in eadem basi, atque in iisdem parallelis, ad quàmlibet distantium intervallum obliquè excurrentibus: de spatiis quantumvis exiguis ad quamvis lineam applicandis, adeoque ad perimetrum majorem

rem quolibet dato redigendis &c. quæ nunc, ut nugas, & crepundia ætatis illius despicimus: manet adhuc inconcussa adversus omnem reluctantis imaginationis conatum, adversus inanes Scepticorum cavillationes, & Pseudophilosophorum impetus, priscis olim temporibus demonstrata, cujusvis magnitudinis infinita Divisibilitas: manet tam certa, & evidens, quàm adhuc intellectui nostro incomprenensibilis, quæ ante omnem hominum memoriam olim detecta fuit, nonnullarum quantitatum Incommensurabilitas, quam siquis ignoraret, hunc non hominem, sed pecudem potius dicendum Plato censebat: manet adhuc numquam non celebranda, æquè ac semper stupenda illa Asymptotorum affectio, quam, adolescente jam Geometria, Conici Scriptores deprehenderunt, nunc autem Mathematici recentiores, non ad unam, aut alteram curvam, Hyperbolam scilicet Apollonii, & Conchoidem Nicomedis, dumtaxat restringi, sed innumeris prorsus novis lineis facillimæ descriptionis, nonnullis etiam antiquis eadem lege continuatis, ut Nicostrati Quadratici, & Dioclis Cissoidi, convenire demonstrarunt. Verùm hæc nulla sunt, si cum illa felici non minùs, quàm audaci Geometriæ, virilitatem suam jam adeptæ, aggressione conferantur, qua scilicet innumeros terminos in unam summam finitam colligere, immensæ longitudinis solida, & superficies, terminatæ, ac undique circumscriptæ sui generis æque coequare, infinitarum quantitatum proportiones, & gradus distinguere, & infinitè parva magnitudinum elementa reperire, atque in varias classes distribuere docuit. Neque verò ad sterilem, & otiosam duntaxat speculationem hæc pertinere, non etiã externis hominum usibus, quibus civilis vita maximè indiget, inservire quis arbitretur: nulla quippe adeò abstracta, & ab omnis materiæ commercio remota cognitio in Geometricis assignari potest, cui vel nunc, vel aliquando, fructus aliquis ex his, quæ apud vulgus in pretio esse solent, non sit referendus, sive inde per se ipsum pendeat, sive mediis aliis notitiis ejusdem, aut ulterius Scientie, quam prior illa cognitio perfecerit. Profundioribus utique Geometriæ speculationibus, & abstrusioribus Analyticæ Calculis, tum Mechanicam, tum Opticam, tum Astronomiam, tum Nauticam, tum Geographiam, tum Architecturam, ac ceteras denique Scientias, & Artes, Reipublicæ commodis, & utilitatibus prospicientes, auctas hodie, locupletatas, & ad faciliorem methodum redactas accepimus, novisque semper incrementis, recen-

tiorum Mathematicorum beneficio, magis ac magis in dies perficiendas speramus. Quocirca summa sollicitudine omnino curandum est, ut profundiores Geometrarum Theoriæ, quas persejucundissimas, & de universo hominum genere tam benè merentes experimur, assiduè promoveantur, habitoque inter veras, & (siquæ irrepserint) falsas delectu, his confutatis confirmentur illæ, atque ab obiectis fortasse scrupulis vindicentur. Hinc, cùm Clarissimi, inter præcipuos inclytæ Nationis tuæ Mathematicos, Joannis VVallisii PLUSQUAM-INFINITA spatia, quæ primus ipse inter hyperbolas infinitas altioris ordinis, summa cum omnium admiratione, detexit, à nonnullis Regiæ Parisiensis Academiæ Geometris nuper in dubium vocari, tum apertè reiici animadverterem, operæ pretium facturum me existimavi, si rem totam [quæ maximi est in scientiis nostris momenti, ob connexionem, quam cum methodo recentiorum Analystarum Scientia hæc Infiniti sortitur] iterum examini subijcerem, & ad lydium Geometriæ lapidem exigerem, de tam celebri controversia deliberaturus: cùmque VVallisii vestri partibus multiplex ab ipsa veritate suffragium accedere deprehendissem, irrogatam Viro gravissimo injuriam propulsandam, inustam immortali ejus Nomini labem abstergendam, ejusque doctrinam ab omni fallaciæ suspicione hoc libello purgandam, Te potissimùm hortatore, constitui. Novos addidit operi stimulos ipsamet Illustrissima Regalis Societas, à Serenissimo Rege Carolo II. ad naturales Scientias promovendas fundata, dum me, obscurum, ac peregrinum hominem, inter socios suos ultrò conscribendum censuit, measque, in Armachani Præsulis systema sonorum, speculationes, Illustrissimo Præside Isaac Nevvtono Equite aurato, Mathematicorum nostri seculi Principe, necnon Doctissimo Haulæo, in Universitate Oxoniensi Professore Astronomiæ Saviliano, summè probantibus, ejusdem Academiæ actis inseri, & inter philosophicas Transactiones edi mandavit: cui quidem honori, ut aliqua ex parte me gratum ostenderem, nihil opportunius, & huic proposito accomodatius occurrit, quàm si prelaudati VVallisii, qui Regiam ipsam Societatem tantoperè illustravit, famam ab illata calumnia defendendam hac Geometrica Disquisitione susciperem, quam, meo nomine, eidem Amplissimo Academicorum Cetui communicandam, Tibi offero, Vir Illustrissime, atque Eruditissime, ut mei simul erga Te obsequii monumentum aliquod apud posteros maneat, nulla temporis injuria intercidendum. Nihil attinet, ut in Virtutum tuarum, hoc qualecunque venerationis teſtimonium ſuo veluti jure exigentium, uberrimum campum excurrere orationem meam permittam, cum ipſo etenim præſentis Tractatus titulo ampliſſimi hujus argumenti fecunditas decertaret, meque in ſpatia PLUSQUAM-INFINITA laudum tuarum abduceret, ac dolorem denique noſtrum, ex imminentis jacturæ timore conceptum refricaret, dùm à Prudentiſſima Regina, meritorum tuorum ſat conſcia, eximiis honoribus auctus in Patriam revocaris, omnium, quibus Eruditio, Doctrina, Facundia, Elegantia tua, cum ſumma Humanitate conjuncta, perſpecta eſt, amorem tecum, & deſideria ſimul aſportaturus. Unum igitur ſupereſt, ut Te, qua licet fiducia, ſupplex exorem, ad libellum hunc benigna, qua ſoles, fronte excipiendum, ejuſque Auctori, quibus ipſum dignaris, benevolentiæ, & gratiæ tuæ officia jugiter continuanda. Vale.

Piſis, Pridie Kal. Februarii MDCCX.